

МОНОТОННІ СІМ'Ї НА ЦИКЛІЧНИХ НАПІВГРУПАХ

В. М. Гаврилків

*Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника;
76025, м. Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57;
e-mail: vgavrylkiv@gmail.com*

У статті вивчаються праві і ліві нулі, односторонні ліві ідеали, мінімальний ідеал, центральні елементи, скоротні зліва і скоротні справа елементи напівгрупи $\nu(S)$ монотонних сімей на циклічній напівгрупі S , а також характеризуються циклічні напівгрупи, розширення $\nu(S)$ яких є комутативним.

Ключові слова: *циклічна напівгрупа, монотонна сім'я, компактифікація Стоуна-Чеха.*

Вступ

Дана стаття присвячена вивченню структури напівгруп монотонних сімей на циклічних напівгрупах.

Сім'я \mathcal{M} непорожніх підмножин множини X називається *монотонною*, якщо з $B \supset A \in \mathcal{M}$ випливає, що $B \in \mathcal{M}$. Замкнена відносно скінченних перетинів монотонна сім'я \mathcal{F} називається *фільтром*. Фільтр $\mathcal{F}_X = \{F \subset X : X \setminus F \text{ – скінченна}\}$ називається *фільтром Фреше* на множині X . Фільтр \mathcal{U} називається *ультрафільтром*, якщо $\mathcal{U} = \mathcal{F}$ для будь-якого фільтра \mathcal{F} , який містить \mathcal{U} . Множина всіх монотонних сімей на множині X позначається через $\nu(X)$, а сім'я $\beta(X)$ всіх ультрафільтрів на множині X називається *компактифікацією Стоуна-Чеха* множини X , див. [11], [12].

Кожне відображення $f : X \rightarrow Y$ продовжується до відображення

$$\nu f : \nu(X) \rightarrow \nu(Y), \quad \nu f : \mathcal{M} \mapsto \langle f(M) \subset Y : M \in \mathcal{M} \rangle, \quad \text{див. [9]}$$

Тут для сім'ї \mathcal{B} непорожніх підмножин множини Y через $\langle B \subset Y : B \in \mathcal{B} \rangle$ позначено сім'ю

$$\langle B \subset Y : B \in \mathcal{B} \rangle = \{A \subset Y : \exists B \in \mathcal{B} (B \subset A)\}.$$

Ультрафільтр $\{x\}$ називається *головним ультрафільтром*, породженим множиною $\{x\}$, $x \in X$. Можна вважати, що $X \subset \beta(X) \subset \nu(X)$, якщо ототожнити кожен елемент $x \in X$ з головним ультрафільтром $\langle \{x\} \rangle$, породженим множиною $\{x\}$.

В [9] доведено, що кожна асоціативна бінарна операція $*$: $S \times S \rightarrow S$ продовжується до асоціативної бінарної операції \circ : $\nu(S) \times \nu(S) \rightarrow \nu(S)$ за формулою

$$L \circ M = \left\langle \bigcup_{a \in L} a * M_a : L \in \mathcal{L}, \{M_a\}_{a \in L} \subset \mathcal{M} \right\rangle$$

для монотонних сімей $L, M \in \nu(S)$. В цьому випадку компактифікація Стоуна-Чеха $\beta(S)$ є піднапівгрупою напівгрупи монотонних сімей $\nu(S)$.

Непорожня підмножина I напівгрупи $(S, *)$ називається *ідеалом* (відповідно *правим ідеалом*, *лівим ідеалом*), якщо $I * S \cup S * I \subset I$ (відповідно $I * S \subset I$, $S * I \subset I$). Елемент z напівгрупи $(S, *)$ називається *нулем* (відповідно *лівим нулем*, *правим нулем*) в S , якщо $a * z = z * a = z$ (відповідно $z * a = z$, $a * z = z$) для кожного $a \in S$. Це рівносильно тому, що $\{z\}$ є ідеалом (відповідно правим ідеалом, лівим ідеалом) в S . Ідеал $I \subset S$ називається *мінімальним*, якщо кожен ідеал напівгрупи S , що міститься в I , співпадає з I . Аналогічно визначаються мінімальні ліві та мінімальні праві ідеали напівгрупи S . Об'єднання $K(S)$ всіх мінімальних лівих (правих) ідеалів в S співпадає з мінімальним ідеалом напівгрупи S , (див.[11, теор.2.8]). Напівгрупа $(S, *)$ називається *напівгрупою правих нулів*, якщо $a * b = b$ для всіх $a, b \in S$.

Відображення $\varphi: S \rightarrow T$ між двома напівгрупами $(S, *)$ та (T, \circ) називається *гомоморфізмом*, якщо $\varphi(a * b) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$ для всіх $a, b \in S$. Гомоморфізм $\varphi: S \rightarrow I$ з напівгрупи S в ідеал $I \subset S$ називається *ретракцією*, якщо $\varphi(a) = a$ для будь-якого елемента $a \in I$. Елемент a напівгрупи S називається *скоротним зліва (справа)*, якщо для довільних елементів $x, y \in S$ з рівності $ax = ay$ (відповідно $xa = ya$) випливає, що $x = y$. Це рівносильно тому, що лівий (відповідно правий) зсув $l_a: S \rightarrow S$, $l_a: x \mapsto a * x$, (відповідно $r_a: S \rightarrow S$, $r_a: x \mapsto x * a$) є ін'єктивним відображенням. Напівгрупа, всі елементи якої є скоротними зліва (справа), називається *напівгрупою з лівими (правими) скороченнями*.

Напівгрупа $\langle a \rangle = \{a^n\}_{n \in \mathbb{N}}$, породжена елементом a , називається *циклічною*. Якщо циклічна напівгрупа є нескінченною, то вона ізоморфна до адитивної напівгрупи \mathbb{N} . Скінченна циклічна напівгрупа $S = \langle a \rangle$ також має нескладну структуру [7]. Існують натуральні числа r і m , які називаються *індексом* і *періодом* напівгрупи S , такі що:

- $S = \{a, a^2, \dots, a^{m+r-1}\}$ і $m+r-1 = |S|$;

- для кожних $i, j \in \omega$ рівність $a^{r+i} = a^{r+j}$ виконується тоді і лише тоді, коли $i \equiv j \pmod{m}$;

- $C_m = \{a^r, a^{r+1}, \dots, a^{m+r-1}\}$ є мінімальним ідеалом, циклічною і

максимальною підгрупою напівгрупи S з одиницею $e = a^n \in C_m$, де n ділиться на m .

Надалі скінченну циклічну напівгрупу індекса r і періода m позначатимемо через $C_{r,m}$, а її максимальну підгрупу – через C_m .

1 Гомоморфізми, праві, ліві нулі та мінімальні (ліві) ідеали

Твердження 1.1. Для кожного гомоморфізму $\varphi: S \rightarrow T$ між напівгрупами $(S, *_1)$ та $(T, *_2)$ індуковане відображення $\nu\varphi: \nu(S) \rightarrow \nu(T)$ є гомоморфізмом напівгруп $(\nu(S), \circ_1)$ та $(\nu(T), \circ_2)$.

Доведення. Зафіксувавши дві монотонні сім'ї $L, M \in \nu(S)$, одержимо

$$\begin{aligned} \nu\varphi(L \circ_1 M) &= \nu\varphi(\langle \bigcup_{x \in L} x *_1 M_x : L \in L, \{M_x\}_{x \in L} \subset M \rangle) = \\ &= \langle \varphi(\bigcup_{x \in L} x *_1 M_x) : L \in L, \{M_x\}_{x \in L} \subset M \rangle = \\ &= \langle \bigcup_{x \in L} \varphi(x) *_2 \varphi(M_x) : L \in L, \{M_x\}_{x \in L} \subset M \rangle = \\ &= \langle \bigcup_{x \in \varphi(L)} x *_2 \varphi(M_x) : L \in L, \{\varphi(M_x)\}_{x \in \varphi(L)} \subset \nu\varphi(M) \rangle = \\ &= \langle \varphi(L) : L \in L \rangle \circ_2 \langle \varphi(M) : M \in M \rangle = \nu\varphi(L) \circ_2 \nu\varphi(M). \end{aligned}$$

Зауважимо, що для піднапівгрупи T напівгрупи S відображення $i: \nu(T) \rightarrow \nu(S)$, $i: A \rightarrow \langle A \rangle_S$ є ін'єктивним гомоморфізмом, а тому надалі ми ототожнюємо напівгрупу $\nu(T)$ з піднапівгрупою $i(\nu(T)) \subset \nu(S)$.

Лема 1.1. Нехай I – ідеал напівгрупи S . Якщо відображення $\varphi: S \rightarrow I$ є ретракцією, то відображення $\nu\varphi: \nu(S) \rightarrow \nu(I)$ також є ретракцією.

Доведення. Дійсно, нехай $A \in \nu(I)$, $M \in \nu(S)$, тоді

$$\begin{aligned} A \circ M &= \langle \bigcup_{a \in A} a *_1 M_a : A \in A, A \subset I, \{M_a\}_{a \in A} \subset M \rangle = \\ &= \langle \bigcup_{a \in A} a *_1 M_a : A \in A, \{M_a\}_{a \in A} \subset M, \bigcup_{a \in A} a *_1 M_a \subset I \rangle \in \nu(I). \end{aligned}$$

Аналогічно $M \circ A \in \nu(I)$, а тому $\nu(I)$ є ідеалом напівгрупи $\nu(S)$.

Якщо $A \in \nu(I)$, то

$$\nu\varphi(A) = \langle \varphi(A) : A \subset I, A \in A \rangle = \langle A \subset I : A \in A \rangle = \{A \subset I : A \in A\} = A,$$

а отже, $\nu\varphi$ – ретракція.

Лема 1.2. Нехай I – ідеал напівгрупи S і відображення $\varphi: S \rightarrow I$ є ретракцією. Напівгрупа S має правий (лівий) нуль тоді і лише тоді, коли напівгрупа I має правий (лівий) нуль, причому всі праві і ліві нулі напівгрупи S містяться в I .

Доведення. Нехай z – правий (лівий) нуль напівгрупи S , тоді $sz = z$ ($zs = z$) для будь-якого $s \in S$. Оскільки φ – гомоморфізм, то $\varphi(s)\varphi(z) = \varphi(z)$ ($\varphi(z)\varphi(s) = \varphi(z)$). Зокрема, для будь-якого $s \in I$ виконується рівність $\varphi(s) = s$, а тому $s\varphi(z) = \varphi(s)\varphi(z) = \varphi(z)$ ($\varphi(z)s = \varphi(z)\varphi(s) = \varphi(z)$). Таким чином, $\varphi(z)$ – правий (лівий) нуль напівгрупи I .

Навпаки, нехай $z \in I$ – правий (лівий) нуль напівгрупи I . Оскільки I – ідеал, то для будь-якого $s \in S$ маємо $sz, zs \in I$, а отже, $sz = \varphi(sz) = \varphi(s)\varphi(z) = \varphi(s)z = z$ ($zs = \varphi(zs) = \varphi(z)\varphi(s) = z\varphi(s) = z$) і z – правий (лівий) нуль напівгрупи S .

Якщо z – правий (лівий) нуль напівгрупи S , то $z = sz \in I$ ($z = zs \in I$), де $s \in I$. Таким чином, всі праві (ліві) нулі напівгрупи S містяться в I .

Нехай e – одиниця максимальної підгрупи C_m циклічної напівгрупи $C_{r,m}$.

Лема 1.3. Відображення $\varphi: C_{r,m} \rightarrow C_m$, $\varphi(x) = ex$ є ретракцією, причому $\varphi(x)y = xy$ для будь-яких $x \in C_{r,m}$ і $y \in C_m$.

Доведення. Оскільки підгрупа C_m є ідеалом напівгрупи $C_{r,m}$, то $\varphi(x) = ex \in C_m$. Тоді $\varphi(xy) = exy = eexy = exey = \varphi(x)\varphi(y)$ для будь-яких $x, y \in C_{r,m}$ і $\varphi(x) = ex = x$ при $x \in C_m$. А отже, відображення $\varphi: C_{r,m} \rightarrow C_m$ є ретракцією. Далі для будь-яких $x \in C_{r,m}$ і $y \in C_m$ маємо, що $xy \in C_m$, а тому $\varphi(xy) = xy$. З іншого, боку $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x)y$, бо $y \in C_m$.

З лем 1.1.-1.3. випливає наступне:

Твердження 1.2. Напівгрупа $\nu(C_{r,m})$ містить правий (лівий) нуль тоді і лише тоді, коли її піднапівгрупа $\nu(C_m)$ містить правий (лівий) нуль. Причому кожен правий (лівий) нуль $\nu(C_{r,m})$ належить $\nu(C_m)$.

Нехай S – напівгрупа. В [9] доведено, що монотонна сім'я $M \in \nu(S)$ є правим нулем в S тоді і лише тоді, коли M є інваріантною в тому сенсі, що $sM, s^{-1}M \in M$ для будь-якого $s \in S$ і для будь-якого $M \in M$, де $s^{-1}M = \{a \in S : sa \in M\}$.

Оскільки фільтр Фреше на нескінченній циклічній напівгрупі N є інваріантним, то напівгрупа $\nu(N)$ містить правий нуль. Більше того, аналогічними міркуваннями як в теоремі 2.2 з [1] можна показати, що напівгрупа $\nu(N)$ містить 2^c правих нулів.

Оскільки для кожної групи G монотонна сім'я $\{G\}$ є інваріантною, а отже, правим нулем напівгрупи $\nu(G)$, то з попереднього твердження випливає наступне:

Твердження 1.3. Для кожної циклічної напівгрупи S напівгрупа $\nu(S)$ містить правий нуль.

Твердження 1.4. Для скінченної циклічної напівгрупи $C_{r,m}$ напівгрупа $\nu(C_{r,m})$ містить (лівий) нуль тоді і тільки тоді, коли період $m = 1$.

Доведення. Якщо період $m=1$, то напівгрупа $\nu(C_1)$ містить єдиний елемент, який, очевидно, є її нулем. Тоді згідно з твердженням 1.2 напівгрупа $\nu(C_{r,1})$ також містить (лівий) нуль. У випадку $m > 1$ напівгрупа $\nu(C_m)$ містить принаймні два правих нулі $Z_1 = \{C_m\}$ і $Z_2 = \langle \{g\} : g \in C_m \rangle$. Таким чином, $\nu(C_m)$ не містить жодного лівого нуля, і з твердження 1.2 випливає, що напівгрупа $\nu(C_{r,m})$ не містить (лівих) нулів.

Далі ми охарактеризуємо циклічні напівгрупи S , для яких напівгрупа $\nu(S)$ містить одноточкові мінімальні ліві ідеали.

Монотонна сім'я $Z \in \nu(S)$ є правим нулем напівгрупи $\nu(S)$ тоді і тільки тоді, коли одноточкова множина $\{Z\}$ є мінімальним лівим ідеалом у $\nu(S)$. Оскільки всі мінімальні ліві ідеали ізоморфні між собою і об'єднання $K(\nu(S))$ всіх мінімальних лівих ідеалів в $\nu(S)$ співпадає з мінімальним ідеалом напівгрупи $\nu(S)$ (див.[11,теор.2.8]), то з тверджень 1.3 і 1.4 випливає наступна

Теорема 1. Для циклічної напівгрупи S всі мінімальні ліві ідеали напівгрупи $\nu(S)$ є одноточковими множинами. В цьому випадку мінімальний ідеал $K(\nu(S))$ напівгрупи $\nu(S)$ є її піднапівгрупою правих нулів. Циклічна напівгрупа містить одноточкові мінімальні праві ідеали тоді і лише тоді, коли вона є скінченною циклічною напівгрупою періода 1.

2 Комутативність та центральні елементи

Теорема 2. Для циклічної напівгрупи S напівгрупа $\nu(S)$ є комутативною тоді і лише тоді, коли S є скінченною циклічною напівгрупою періода $m=1$ і індекса $r \in \{1,2,3\}$.

Доведення. Якщо період m скінченної циклічної напівгрупи $C_{r,m}$ більший одиниці, то з доведення твердження 1.4 відомо, що напівгрупа $\nu(C_{r,m})$ містить принаймні два правих нулі, а тому не може бути комутативною.

Нехай індекс циклічної напівгрупи S , породженої елементом a , більший за 3 або вона є нескінченною циклічною напівгрупою. Розглянемо монотонні сім'ї $A = \langle \{a\}, \{a^2\} \rangle$ та $B = \langle \{a, a^2\} \rangle$. Оскільки $A \circ B = \langle \{a^2, a^3\}, \{a^3, a^4\} \rangle$, а $B \circ A = \langle \{a^3\} \rangle$, то дані сім'ї не комутують, і напівгрупа $\nu(S)$ не є комутативною.

Напівгрупа $\nu(C_{1,1})$ є одноточковою. Для циклічної напівгрупи $C_{2,1} = \{a, a^2 \mid a^3 = a^2\}$ добуток будь-яких монотонних сімей напівгрупи

$\nu(C_{2,1})$ дорівнює головному ультрафільтру $\langle\langle a^2 \rangle\rangle$. Таким чином, напівгрупи $G(C_{1,1})$ і $G(C_{2,1})$ комутативні.

Розглянемо циклічну напівгрупу $C_{3,1} = \{a, a^2, a^3 \mid a^4 = a^3\}$. З формули множення

$$A \circ B = \langle \bigcup_{a \in A} a * B_a : A \in \mathcal{A}, \{B_a\}_{a \in A} \subset B \rangle$$

впливає, що головні ультрафільтри комутують з усіма монотонними сім'ями. Якщо A і B не є головними ультрафільтрами, але всі їх елементи містять елемент a , то $A \circ B = B \circ A = \langle\langle a^2, a^3 \rangle\rangle$. У випадку, коли A або B містить елемент $M \subset C_{3,1} \setminus \{a\}$, добуток $MA = AM = \{a^3\}$ для будь-якого $A \in \mathcal{A}, B$. І якщо при цьому $\{a\} \in A$ і $\{a\} \in B$, то $A \circ B = B \circ A = \langle\langle a^2 \rangle\rangle, \langle\langle a^3 \rangle\rangle$, в іншому випадку $A \circ B = B \circ A = \langle\langle a^3 \rangle\rangle$. Таким чином, всі елементи $\nu(C_{3,1})$ комутують.

Оскільки циклічна напівгрупа S є комутативною, то з формули множення

$$A \circ B = \langle \bigcup_{a \in A} a * B_a : A \in \mathcal{A}, \{B_a\}_{a \in A} \subset B \rangle$$

впливає, що всі головні ультрафільтри є центральними в напівгрупі $\nu(S)$. В статті [9] доведено, що для групи G монотонна сім'я є центральною в $\nu(G)$, тоді і тільки тоді, коли вона є головним ультрафільтром. Ми покажемо, що для скінченної циклічної напівгрупи $C_{r,m}$ напівгрупа $\nu(C_{r,m})$ містить центральні елементи, які не є головними ультрафільтрами.

Лема 2.1. Нехай $\varphi: S \rightarrow I$ – ретракція напівгрупи S на ідеал I . Якщо a є центральним елементом у напівгрупі S , то $\varphi(a)$ є центральним елементом у напівгрупі I

Доведення. Дійсно, для будь-якого $x \in I$ маємо

$$\varphi(a)x = \varphi(a)\varphi(x) = \varphi(ax) = \varphi(xa) = \varphi(x)\varphi(a) = x\varphi(a).$$

Теорема 3. Для кожної скінченної циклічної напівгрупи $C_{r,m}$ центр напівгрупи $\nu(C_{r,m})$ містить монотонні сім'ї, які не є головними ультрафільтрами. Центр напівгрупи $\nu(C_{2,m})$ містить $m+2$ елементи.

Доведення. Оскільки за лемами 1.3 і 1.1 відображення $\varphi: C_{r,m} \rightarrow C_m$, $\varphi(x) = ex$ і $\nu\varphi: \nu(S) \rightarrow \nu(I)$ є ретракціями, а центральними елементами напівгрупи $\nu(C_m)$ є тільки головні ультрафільтри, то з леми 2.1 випливає, що якщо монотонна сім'я $M \in \nu(C_{r,m})$ є центральною, то $M \subset \langle(\nu\varphi)^{-1}(\langle\langle x \rangle\rangle)\rangle, x \in C_m$. Нехай a – твірний елемент напівгрупи $C_{r,m}$. Розглянемо елементи a^{r-1} та

$\varphi(a^{r-1}) = ea^{r-1}$. Ми стверджуємо, що монотонні сім'ї $A = \langle \{a^{r-1}, ea^{r-1}\} \rangle$ і $B = \langle \{a^{r-1}\}, \{ea^{r-1}\} \rangle$ є центральними в напівгрупі $\nu(C_{r,m})$.

Оскільки $a^{r-1}x \in C_m = \{a^r, \dots, a^{r+m-1}\}$ для будь-якого $x \in C_{r,m}$, то $a^{r-1}x = \varphi(a^{r-1}x) = \varphi(a^{r-1})\varphi(x)$. З іншого боку, оскільки C_m – ідеал $C_{r,m}$, то $\varphi(a^{r-1})x \in C_m$ і $\varphi(a^{r-1})x = \varphi(\varphi(a^{r-1})x) = \varphi(\varphi(a^{r-1}))\varphi(x) = \varphi(a^{r-1})\varphi(x)$. Таким чином, $\varphi(a^{r-1})x = a^{r-1}x$ для будь-якого $x \in C_{r,m}$. Тоді

$$A \circ M = \langle \{\varphi(a)\} \rangle \circ M = M \circ \langle \{\varphi(a)\} \rangle = M \circ A \quad \text{і}$$

$B \circ M = \langle \{\varphi(a)\} \rangle \circ M = M \circ \langle \{\varphi(a)\} \rangle = M \circ B$ для будь-якого $M \in \nu(C_{r,m})$, а тому A і B є центральними елементами напівгрупи $\nu(C_{r,m})$.

Розглянемо циклічну напівгрупу $C_{2,m} = \{a, a^2, \dots, a^{m+1} \mid a^{m+2} = a^2\}$. Одиницею максимальної підгрупи C_m є елемент $e = a^m$. Оскільки $\varphi(a) = ea = a^m a = a^{m+1}$, то єдиний елементом групи C_m з неодноточковим прообразом при ретракції $\varphi: C_{2,m} \rightarrow C_m$ є a^{m+1} . Таким чином, центральними елементами в напівгрупі $\nu(C_{2,m})$, які не є головними ультрафільтрами, є лише монотонні сім'ї $\langle \{a\}, \{a^{m+1}\} \rangle$ та $\langle \{a, a^{m+1}\} \rangle$, які ми розглянули вище.

3 Скоротні справа (зліва) елементи

В цьому підрозділі ми опишемо скоротні зліва (справа) елементи розширення $\nu(S)$ циклічної напівгрупи S .

Твердження 3.1. Напівгрупа $\nu(C_{r,m})$ містить скоротні (зліва, справа) елементи тоді і лише тоді, коли індекс r циклічної напівгрупи $C_{r,m}$ дорівнює 1.

Доведення. Нехай індекс $r > 1$ і a – твірний елемент напівгрупи $C_{r,m}$. В доведенні теореми 3 ми показали, що $\varphi(a^{r-1})x = a^{r-1}x$ для будь-якого $x \in C_{r,m}$.

Нехай M – довільна монотонна сім'я на напівгрупі $C_{r,m}$, тоді

$$\langle \{a^{r-1}\} \rangle \circ M = \langle \bigcup_{a \in \{a^{r-1}\}} a * M_a : \{M_a\}_{a \in L} \subset M \rangle = \langle a^{r-1}M : M \in M \rangle =$$

$$= \langle \varphi(a^{r-1})M : M \in M \rangle = \langle \varphi(a^{r-1}) \rangle \circ M \quad \text{і}$$

$$M \circ \langle \{a^{r-1}\} \rangle = \langle \bigcup_{a \in M} a * \{a^{r-1}\} : M \in M \rangle = \langle Ma^{r-1} : M \in M \rangle =$$

$$= \langle M\varphi(a^{r-1}) : M \in M \rangle = M \circ \langle \{\varphi(a^{r-1})\} \rangle.$$

Оскільки $a^{r-1} \neq \varphi(a^{r-1})$, то монотонна сім'я M не є ні скоротною зліва, ні скоротною справа.

Якщо $r = 1$, то циклічна напівгрупа $C_{1,m} = C_m$ є групою. Нехай e – одиниця групи C_m . Тоді $\langle\{e\}\rangle \circ M = M = M \circ \langle\{e\}\rangle$ для будь-якого $M \in \nu(C_m)$ і з рівностей $X \circ \langle\{e\}\rangle = Y \circ \langle\{e\}\rangle$ та $\{e\} \circ X = \{e\} \circ Y$ випливає, що $X = Y$. Таким чином, головний ультрафільтр $\langle\{e\}\rangle$ є скоротним елементом напівгрупи $\nu(C_{1,m})$.

Якщо G – група, то з формули множення

$$L \circ M = \langle \bigcup_{a \in L} a * M_a : L \in L, \{M_a\}_{a \in L} \subset M \rangle$$

в напівгрупі $\nu(G)$ випливає, що добуток $L \circ M$ двох монотонних сімей L і M є головним ультрафільтром тоді і тільки тоді, коли одночасно L і M є головними ультрафільтрами. Таким чином, одержуємо наступне

Твердження 3.2. Для довільної групи G множина $\nu(G) \setminus \{\{g\} : g \in G\}$ є ідеалом в $\nu(G)$.

Лема 3.1. Напівгрупа S є напівгрупою з лівими (правими) скороченнями тоді і лише тоді, коли всі головні ультрафільтри є скоротними зліва (справа) елементами в розширенні $\nu(S)$.

Доведення. Якщо елемент $a \in S$ не є скоротним зліва (справа) в напівгрупі S , то й головний ультрафільтр, породжений елементом a , не є скоротним в $\nu(S)$.

Нехай S є напівгрупою з лівими (правими) скороченнями, $a \in S$ і $X, Y \in \nu(S)$, $X \neq Y$. Не обмежуючи загальності можна вважати, що $X \in X \setminus Y$ для деякого $X \in X$. Тоді $(S \setminus X) \cap Y \neq \emptyset$ для будь-якого $Y \in Y$. Оскільки всі елементи напівгрупи S є скоротними зліва (справа), то $(S \setminus aX) \cap aY \neq \emptyset$ ($(S \setminus Xa) \cap Ya \neq \emptyset$), а тому $\langle\{a\}\rangle \circ X \neq \langle\{a\}\rangle \circ Y$ ($X \circ \langle\{a\}\rangle \neq Y \circ \langle\{a\}\rangle$). Таким чином, лівий $l_{\langle\{a\}\rangle}$ (правий $r_{\langle\{a\}\rangle}$) зсув є ін'єктивним відображенням і головний ультрафільтр $\langle\{a\}\rangle$ є скоротним зліва (справа).

Твердження 3.3. Елемент $M \in \nu(C_{1,m})$ є скоротним зліва (справа), тоді і лише тоді, коли M є головним ультрафільтром.

Доведення. Оскільки в будь-якій групі, зокрема циклічній $C_{1,m}$, всі елементи є скоротними, то за лемою 3.1 всі головні ультрафільтри є скоротними елементами в розширенні $\nu(C_{1,m})$.

Припустимо, що деяка монотонна сім'я $M \in \nu(C_{1,m}) \setminus \{\{g\} : g \in C_{1,m}\}$ є скоротною зліва. Це означає, що лівий зсув $l_M : \nu(C_{1,m}) \rightarrow \nu(C_{1,m})$, $l_M : A \mapsto M \circ A$ є ін'єктивним. Згідно з твердженням 3.2 множина $\nu(C_{1,m}) \setminus \{\{g\} : g \in C_{1,m}\}$ є ідеалом в $\nu(C_{1,m})$.

Отже, $l_M(\nu(C_{1,m})) = M \circ \nu(C_{1,m}) \subset \nu(C_{1,m}) \setminus \{\{g\} : g \in C_{1,m}\}$. Оскільки $\nu(C_{1,m})$ є скінченною, то l_M не може бути ін'єктивним.

Для скоротних справа елементів доведення аналогічне.

Нескінченна підмножина $T \subset \mathbf{N}$ називається *тонкою*, якщо перетин $(m+T) \cap (n+T)$ є скінченним для будь-яких $m, n \in \mathbf{Z}, m \neq n$.

Прикладом тонкої множини є множина $T = \{2^n : n \in \mathbf{N}\}$. Для підмножин $A, B \in \mathbf{N}$ будемо писати, що $A \subset^* B$, якщо $A \setminus B$ є скінченною, та $A =^* B$, якщо $A \subset^* B$ і $B \subset^* A$.

Теорема 4. Монотонна сім'я є скоротною зліва в напівгрупі $\nu(\mathbf{N})$ тоді і лише тоді, коли вона є головним ультрафільтром.

Доведення. Оскільки нескінченна циклічна напівгрупа \mathbf{N} є напівгрупою з лівими і правими скороченнями, то з леми 3.1 випливає, що всі головні ультрафільтри є скоротними елементами в напівгрупі $\nu(\mathbf{N})$.

Припустимо, що монотонна сім'я \mathbf{M} є скоротною зліва в $\nu(\mathbf{N})$.

Спершу покажемо, що \mathbf{M} містить односточкову множину. Припустимо протилежне, що $|M| \geq 2$ для будь-якого $M \in \mathbf{M}$. Нехай $T \subset \mathbf{N}$ – деяка тонка множина. Розглянемо фільтри Фреше F_N і $F_{N \setminus T}$ на множинах \mathbf{N} і $\mathbf{N} \setminus T$ відповідно. Очевидно, що $F_N \subset F_{N \setminus T}$. Оскільки F_N є інваріантним на множині \mathbf{N} , то F_N є правим нулем напівгрупи $\nu(\mathbf{N})$. Таким чином, $F_N = M \circ F_N \subset M \circ F_{N \setminus T}$. Покажемо, що $M \circ F_{N \setminus T} \subset F_N$. Нехай

$\bigcup_{m \in M} (m + F_m) \in M \circ F_{N \setminus T}$, де $M \in \mathbf{M}, F_m \in F_{N \setminus T}$. Зафіксуємо деякі $a, b \in M$, $a \neq b$. Тоді

$$\mathbf{N} \setminus \bigcup_{m \in M} (m + F_m) = \bigcap_{m \in M} (\mathbf{N} \setminus (m + F_m)) \subset (\mathbf{N} \setminus (a + F_a)) \cap (\mathbf{N} \setminus (b + F_b)) =^* (a + (\mathbf{N} \setminus F_a)) \cap (b + (\mathbf{N} \setminus F_b)) =^* (a + T) \cap (b + T).$$

Оскільки перетин $(a+T) \cap (b+T)$ є скінченним, то й множина $\mathbf{N} \setminus \bigcup_{m \in M} (m + F_m)$ є скінченною, а отже, $\bigcup_{m \in M} (m + F_m) \in F_N$. Таким чином, $M \circ F_N = M \circ F_{N \setminus T}$, що протирічить тому, що \mathbf{M} є скоротною зліва моноотонною сім'єю напівгрупи $\nu(\mathbf{N})$.

Отже, \mathbf{M} містить деяку односточкову множину $\{c\}$. Ми стверджуємо, що \mathbf{M} збігається з головним ультрафільтром, породженим $\{c\}$. Припустивши протилежне, отримуємо, що $\mathbf{N} \setminus \{c\} \in \mathbf{M}$. Нехай \mathbf{A} – монотонна сім'я всіх нескінченних підмножин множини \mathbf{N} , а \mathbf{B} – монотонна сім'я всіх нескінченних підмножин множини \mathbf{N} , які не містяться в тонкій множині T . Тоді $M \circ \mathbf{B} \subset M \circ \mathbf{A} \subset \mathbf{A}$. Покажемо, що $\mathbf{A} \subset M \circ \mathbf{B}$. Нехай $A \in \mathbf{A}$. Покладемо $B = (A - c) \cap \mathbf{N}$. Якщо B не є підмножиною множини T , то

$$M \circ B \ni \{c\} + B = c + ((A - c) \cap \mathbf{N}) \subset c + (A - c) = A.$$

Звідки випливає, що $A \in M \circ \mathbf{B}$. В іншому випадку, якщо $B = (A - c) \cap \mathbf{N} \subset T$, то для кожного $x \in \mathbf{N} \setminus \{c\} \in \mathbf{M}$ покладемо

$B_x = (A-x) \cap \mathbf{N}$. Маємо, що $B_x =^* A-x = A-c + (c-x) \subset^* T + (c-x)$ і $B_x \cap T \subset^* (T + (c-x)) \cap T$. Оскільки множина T є тонкою, то перетин $B_x \cap T$ є скінченним і B_x не є підмножиною множини T . Отже, $B_x \in \mathbf{B}$, $\mathbf{M} \circ \mathbf{B} \ni \bigcup_{x \in (\mathbf{N} \setminus \{c\})} (x + B_x) \subset A$ і $A \in \mathbf{M} \circ \mathbf{B}$. Таким чином, $\mathbf{M} \circ \mathbf{B} = \mathbf{M} \circ \mathbf{A} = \mathbf{A}$, що суперечить вибору \mathbf{M} як скоротної зліва монотонної сім'ї в $\nu(\mathbf{N})$.

Література

1. Banakh T. Algebra in superextensions of groups, I: zeros and commutativity / T.Banakh, V.Gavrylkiv, O.Nykyforchyn // Algebra Discrete Math. – 2008. – No.3. – P. 1-29.
2. Banakh T. Algebra in superextension of groups, II: cancelativity and centers / T.Banakh, V.Gavrylkiv // Algebra Discrete Math. – 2008. – No.4. – P. 1-14.
3. Banakh T. Algebra in superextension of groups: minimal left ideals / T.Banakh, V.Gavrylkiv // Mat. Stud. – 31 (2009). – P. 142-148.
4. Banakh T. Algebra in the superextensions of twinic groups / T.Banakh, V.Gavrylkiv // Dissert. Math. – 473 (2010). – 74 pp.
5. Banakh T. Algebra in superextensions of semilattices / T.Banakh, V.Gavrylkiv // Algebra Discrete Math. – 13:1 (2012). – P. 26-42.
6. Banakh T. Algebra in superextensions of inverse semigroups, / T.Banakh, V.Gavrylkiv // Algebra Discrete Math. – 13:2 (2012). – P. 147-168.
7. Clifford A.H. The algebraic theory of semigroups. Vol. I. / A.H.Clifford, G.B.Preston / Mathematical Surveys. – 7. AMS, Providence, RI, 1961.
8. Gavrylkiv V. The spaces of inclusion hyperspaces over noncompact spaces / V.Gavrylkiv // Mat. Stud. – 28:1 (2007). – P. 92-110.
9. Gavrylkiv V. Right-topological semigroup operations on inclusion hyperspaces / V.Gavrylkiv // Mat. Stud. – 29:1 (2008). – P. 18-34.
10. Gavrylkiv V. On representation of semigroups of inclusion hyperspaces / V.Gavrylkiv // Carpathian Mathematical Publication. – 2:1 (2010). – P. 24-34.
11. Hindman N. Algebra in the Stone-Čech compactification, de Gruyter / N.Hindman, D.Strauss. – Berlin, New York, 1998.
12. Teleiko A. Categorical Topology of Compact Hausdorff Spaces A.Teleiko, M.Zarichnyi. – VNTL, Lviv, 1999.

*Стаття поступила в редакційну колегію 24.12.2012 р.
Рекомендовано до друку д.ф-м.н., доцентом Заторським Р.А.,
д.т.н., професором Обжерінім Ю.Є. (м. Севастополь)*

MONOTONE FAMILIES ON CYCLIC SEMIGROUPS**V. M. Gavrylkiv***Vasyl Stefanyk Precarpathian National University;**76025, Ivano-Frankivs'k, Shevchenko str., 57;**e-mail: vgavrylkiv@gmail.com*

Given a cyclic semigroup S we study right and left zeros, singleton left ideals, the minimal ideal, central elements, left cancelable and right cancelable elements of extensions $\nu(S)$ and characterize cyclic semigroups whose superextensions are commutative.

Key words: *cyclic semigroup, monotone family, Stone-Čech extension.*