Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника

На правах рукопису

Гаврилків Володимир Михайлович

УДК 512.53

Алгебро-топологічні структури на суперрозширеннях

Спеціальність 01.01.06 —
алгебра і теорія чисел

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
д.ф.-м.н., професор
Банах Тарас Онуфрійович

Івано-Франківськ — 2009

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми дослідження. Після того як Ґелвін і Ґлезер придумали[1] топологічне доведення теореми Гайдмена [53], топологічні методи стали стандартним інструментом в сучасній комбінаториці чисел. Визначальним є той факт, що кожна напівгрупова операція $*$, визначена на дискретному просторі S, продовжується до правотопологічної напівгрупової операції на $\beta(S)$, компактифікації Стоуна-Чеха простору S. Наділена продовженою операцією, компактифікація Стоуна-Чеха $\beta(S)$ перетворюється на компактну гаусдорфову правотопологічну напівгрупу. Оскільки напівгрупа $\beta(S)$ компактна, то вона містить ідемпотенти, мінімальні (ліві) ідеали, і т.д., існування яких має важливі комбінаторні застосування.

Дослідженням проблем комбінаторики з допомогою ультрафільтрів займаються такі всесвітньо відомі математики як І. Протасов (Україна) [18, 16, 61, 17, 62], Є. Зеленюк (Україна-ПАР) [6, 7], Н. Гайдмен (США) [53, 54, 55], Д. Штраус (Англія) [55], С. Феррі (Італія-Великобританія-Колумбія) [42] та багато інших.

Компактифікацію Стоуна-Чеха $\beta(S)$ можна розглядати як підмножину другої степінь-множини $\mathcal{P}(\mathcal{P}(S))$. Степінь-множина $\mathcal{P}(X)$ довільної множини X (зокрема, $X = \mathcal{P}(S)$) має природну компактну топологію, успадковану з канторового куба $\{0,1\}^X$ після ототожнення кожної підмножини $A \subset X$ з її характеристичною функцією. Степінь-множина $\mathcal{P}(X)$ є повною дистрибутивною ґраткою по відношенню до операцій перетину і об'єднання.

Найменша повна підґратка ґратки $\mathcal{P}(\mathcal{P}(S))$, що містить $\beta(S)$, збігається з простором $G(S)$ гіперпросторів включення, добре вивченим об'єктом категорної топології. За означенням, сім'я $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(S)$ непорожніх підмножин S називається *гіперпростором включення*, якщо разом з кожною множиною $A \in \mathcal{A}$ сім'я $\mathcal{A}$ містить усі надмножини множини A в S.

---

[1] Не опубліковано, див. [55, с.102], [54].

Завданням дисертаційного дослідження є показати, що асоціативна бінарна операція, визначена на дискретному просторі S, продовжується не тільки на $\beta(S)$, але також і на найменшу повну підґратку $G(S) \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(S))$, породжену множиною $\beta(S)$, а також вивчити алгебраїчну та алгебро-топологічну структуру одержаних напівгруп. Наділений продовженою операцією, простір гіперпросторів включення $G(S)$ стає суперкомпактною правотопологічною напівгрупою, що містить $\beta(S)$ як замкнену піднапівгрупу. Крім $\beta(S)$, напівгрупа $G(S)$ містить багато інших важливих підпросторів в якості замкнених піднапівгруп: суперрозширення $\lambda(S)$ простору S, простір $N_k(S)$ k-зчеплених гіперпросторів включення, простір $\mathrm{Fil}(S)$ фільтрів на S (який містить ізоморфну копію степінь-напівгрупи $\Gamma(S)$ напівгрупи S), і т.д.

Очікується, що дослідження алгебраїчних структур на суперрозширеннях та просторах гіперпросторів включення проллє світло на деякі відомі проблеми комбінаторики, що не розв'язуються з допомогою ультрафільтрів. Зокрема, це стосується проблеми Овінґса про існування нескінченної одноколірної множини виду $A + A$ у довільному двоколірному розфарбуванні натурального ряду. Вищезазначене доводить актуальність дисертаційного дослідження, обумовлює його структуру.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційне дослідження проведене в рамках плану наукової роботи кафедри алгебри та геометрії Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника за проектом Державного фонду фундаментальних досліджень 25.1/099 "Узагальнення ймовірнісних мір, їх категорні і фрактальні властивості, наближення і застосування", номер державної реєстрації 0108U009228, а також в рамках плану наукової роботи кафедри геометрії і топології Львівського національного університету імені Івана Франка МТ224Ф "Тополого-алгебраїчні структури та їх застосування", номер державної реєстрації 0104U002128.

Мета і задачі дослідження. Дисертаційне дослідження має на меті продовження асоціативної бінарної операції, заданої на дискретному просторі S, до напівгрупової правотопологічної операції на просторі гіперпросторів включення $G(S)$ та його підпросторах; вивчення структур одержаних напівгруп. Для досягнення поставленої мети в дисертації потрібно розв'язати такі задачі:

— продовжити асоціативну бінарну операцію, задану на дискретному топологічному просторі S, до напівгрупової правотопологічної операції на просторі гіперпросторів включення $G(S)$ та його підпросторах;

— дослідити алгебраїчні та алгебро-топологічні властивості напівгруп $G(S)$;

— дослідити алгебраїчні та алгебро-топологічні властивості суперрозширень $\lambda(S)$ груп S.

Об'єкт дослідження - гіперпростори включення, суперрозширення груп, напівгрупи гіперпросторів включення і максимальних зчеплених систем.

Предмет дослідження - алгебраїчна структура напівгруп гіперпросторів включення і максимальних зчеплених систем.

Методи дослідження. У дисертаційній роботі широко використовуються методи теорії груп та напівгруп, теорії правотопологічних напівгруп, p-адичного аналізу, теорії категорій, функторів і монад, загальної топології, загальні теоретико-множинні, комбінаторні та тополого-алгебраїчні методи.

Наукова новизна одержаних результатів. В дисертації вперше отримано такі результати:

— продовжено асоціативну бінарну операцію, задану на дискретному топологічному просторі S, до напівгрупової правотопологічної операції на просторі гіперпросторів включення $G(S)$ та його підпросторах;

— вивчено самозачеплені множини в групах і обчислено їх мінімальну потужність для деяких груп;

— описано мінімальні (ліві) ідеали, топологічні та алгебраїчні центри, скоротні справа (зліва) елементи, праві (ліві) нулі, комутативність напівгруп гіперпросторів включення та максимальних зчеплених систем;

— доведена топологічна ізоморфність мінімальних лівих ідеалів напівгруп $\lambda(\mathbb{Z})$ та $\lambda(\mathbb{Z}_2)$, де $\mathbb{Z}_2$ – група 2-адичних цілих чисел;

— повністю описано структуру скінченних напівгруп гіперпросторів включення $G(H)$ та суперрозширення $\lambda(H)$ для груп H малих порядків.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертації мають теоретичний характер і можуть бути використані в комбінаториці чисел, комбінаторній теорії розбиттів, теорії правотопологічних напівгруп, теорії груп, теорії категорій і функторів; результати здобули міжнародне визнання, їх достовірність та наукове значення підтверджуються цитуваннями у статтях інших авторів, зокрема, недавньому огляді “Algebra in the space of ultrafilters and Ramsey Theory” Н. Гайдмена та Д. Штраус.

Особистий внесок здобувача. Результати, викладені у дисертації, отримані здобувачем самостійно. В опублікованих спільно з Т. О. Банахом та О. Р. Никифорчиним статтях співавторам належать постановка задач та обговорення отриманих результатів.

Автор висловлює щиру подяку науковому керівнику – професору Тарасу Онуфрійовичу Банаху та завідувачу кафедри алгебри та геометрії Олегу Ростиславовичу Никифорчину за постійну увагу до роботи і допомогу в розв’язанні складних питань, що виникали під час роботи над дисертацією.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались та обговорювались на:

— VI міжнародній алгебраїчній конференції в Україні (Кам’янець-Подільський, 1-7 липня 2007 р.);

— V літній школі "Алгебра, топологія і аналіз" (Козьова, 6-18 серпня 2007 р.);

— зимовій школі з абстрактного аналізу (топологічна частина) в Чеській Республіці (Гейніце, січень 2008 р.);

— міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми механіки та математики", присвяченої 80-річчю від дня народження академіка НАН України Я. С. Підстригача (Львів, 25-29 травня 2008 р.);

— міжнародній науковій конференції "Аналіз та топологія" (Львів, 2-7 червня 2008 р.);

— на конференції "Теорія множин, топологія та банахові простори" в Республіці Польща (Кельце, 7-11 липня 2008 р.);

— VI літній школі "Теорія множин і нескінченна комбінаторика" в Республіці Польща (Тереміскі, 23-30 серпня 2008 р.);

— міжнародній науковій конференції "Нескінченновимірний аналіз та топологія" (Яремче, 27 травня - 1 червня 2009 р.);

— на засіданнях наукового семінару факультету математики та інформатики та звітних конференціях Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника (Івано-Франківськ, 2005 – 2008 рр.).

Публікації. За матеріалами проведених досліджень опубліковано 5 статтей [46], [47], [26], [27], [28] та 6 тез доповідей конференцій [44], [45], [48], [30], [49], [50]. Серед публікацій 5 праць у наукових виданнях з переліку, затвердженого ВАК України.

Структура і обсяг роботи. Дисертаційна робота складається зі вступу, п'яти розділів, висновків та списку використаних джерел, що містить 69 найменувань (на 6 сторінках). Повний обсяг роботи становить 140 сторінок. Для її оформлення використано видавничу систему LaTeX.

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА ОСНОВНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Після відкриття Ґелвіном і Ґлезером топологічного доведення[1] теореми Гайдмена [53], топологічні методи стали стандартним інструментом в сучасній комбінаториці чисел. Визначальним є той факт, що кожна напівгрупова операція $*$, визначена на дискретному просторі S, продовжується до правотопологічної напівгрупової операції $\circ$ на $\beta(S)$, компактифікації Стоуна-Чеха простору S. Добуток двох ультрафільтрів $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \beta(S)$ може бути знайдений за два кроки: спершу для кожного елемента $a \in S$ напівгрупи продовжуємо лівий зсув $L_a : S \to S$, $L_a : x \mapsto a * x$, до неперервного відображення $\beta L_a : \beta(S) \to \beta(S)$. Таким чином, для кожного $a \in S$ ми визначаємо добуток $a * \mathcal{V} = \beta L_a(\mathcal{V})$. Далі, продовжуючи відображення $R_{\mathcal{V}} : S \to \beta(S)$, $R_{\mathcal{V}} : a \mapsto a * \mathcal{V}$, до неперервного відображення $\beta R_{\mathcal{V}} : \beta(S) \to \beta(S)$, ми визначаємо добуток $\mathcal{U} \circ \mathcal{V} = \beta R_{\mathcal{V}}(\mathcal{U})$. Цей добуток можна також визначити прямо: це ультрафільтр з базою $\bigcup_{x \in U} x * V_x$, де $U \in \mathcal{U}$ і $\{V_x\}_{x \in U} \subset \mathcal{V}$. Наділена продовженою операцією, компактифікація Стоуна-Чеха $\beta(S)$ перетворюється на компактну гаусдорфову правотопологічну напівгрупу. Оскільки напівгрупа $\beta(S)$ компактна, то вона містить ідемпотенти, мінімальні (ліві) ідеали, і т.д., існування яких має важливі комбінаторні застосування.

Той факт, що операцію, визначену на дискретному просторі S, можна продовжити на компактифікацію Стоуна-Чеха, вперше довів М. Дей [40], використовуючи метод Аренса [23]. Ототожнення компактифікації Стоуна-Чеха $\beta(S)$ з простором ультрафільтрів вперше зроблено Еллісом [41, роз. 8] для випадку, коли S – група.

---

[1] Не опубліковано, див. [55, с.102], [54].

Дослідженням проблем комбінаторики з допомогою ультрафільтрів займаються такі всесвітньо відомі математики як І. Протасов (Україна) [18, 16, 61, 17, 62], Є. Зеленюк (Україна-ПАР) [6, 7], Н. Гайдмен (США) [53, 54, 55], Д. Штраус (Англія) [55], С. Феррі (Італія-Великобританія-Колумбія) [42] та багато інших.

Компактифікацію Стоуна-Чеха $\beta(S)$ можна розглядати як підмножину другої степінь-множини $\mathcal{P}(\mathcal{P}(S))$. Степінь-множина $\mathcal{P}(X)$ довільної множини X (зокрема, $X = \mathcal{P}(S)$) має природну компактну топологію, успадковану з канторового куба $\{0,1\}^X$ після ототожнення кожної множини $A \subset X$ з її характеристичною функцією. Степінь-множина $\mathcal{P}(X)$ є повною дистрибутивною ґраткою по відношенню до операцій перетину і об'єднання.

Найменша повна підґратка ґратки $\mathcal{P}(\mathcal{P}(S))$, що містить $\beta(S)$, збігається з простором $G(S)$ гіперпросторів включення, добре вивченим об'єктом категорної топології. За означенням, сім'я $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(S)$ непорожніх підмножин S називається *гіперпростором включення*, якщо разом з кожною множиною $A \in \mathcal{A}$ сім'я $\mathcal{A}$ містить усі надмножини множини A в S. Кожна сім'я $\mathcal{B}$ підмножин множини X породжує гіперпростір включення $\uparrow\mathcal{B} = \{A \subset X : \ A \supset B$ для деякого $B \in \mathcal{B}\}$, який також буде позначатися через $\langle\mathcal{B}\rangle$. У цьому випадку $\mathcal{B}$ називається *базою* гіперпростору включення $\mathcal{A} = \uparrow\mathcal{B}$.

Поняття гіперпростору включення введено Д. Куртісом в 1978 р. [37, 38]. Функтор гіперпросторів включення визначив Є. Мойсеєв [13]. Дослідженням властивостей функтора і монади гіперпросторів включення в категорії компактів займалися такі математики як М. Зарічний [5, 66], Р. Мірзаханян [10, 11], Є. Мойсеєв [12], Т. Радул [19], А. Телейко [64, 65], О. Никифорчин [58] та ін.

Метою **третього розділу** є продовження конструкції простору $G(X)$ гіперпросторів включення поза межі компактів, де ця конструкція добре вивчена, див. [66]. Добре відомо, що конструкція простору гіперпросторів включення є функторіальною в категорії компактів. В третьому розділі ми продовжимо цю конструкцію на категорію нормальних топологічних просторів. Використовуючи взаємозв'язок $G(X)$ з розширенням Волмена $\omega(X)$, ми доведемо, що простір $G(X)$ є гаусдорфовим тоді і тільки тоді, коли X – нормальний, а також покажемо, що для нормального простору X простір $G(X)$ канонічно гомеоморфний $G(\beta X)$, де $\beta(X) = \omega(X)$ – компактифікація Стоуна-Чеха простору X. Насправді, цей розділ може розглядатися як продовження роботи Є.Мойсеєва, який досліджував подібні питання в [13]. Також ми розглянемо важливі замкнені підпростори простору $G(X)$: підпростір фільтрів $\mathrm{Fil}(X)$, k-зчеплених систем $N_k(X)$, максимальних k-зчеплених систем $\lambda_k(X)$.

Ми вивчатимемо алгебраїчну структуру просторів $G(X)$. Для кожного топологічного простору X простір $G(X)$ володіє двома бінарними операціями

$$\cup : G(X) \times G(X) \to G(X), \quad \cup : (\mathcal{F},\mathcal{U}) \mapsto \mathcal{F} \cup \mathcal{U},$$

$$\cap : G(X) \times G(X) \to G(X), \quad \cap : (\mathcal{F},\mathcal{U}) \mapsto \mathcal{F} \cap \mathcal{U},$$

і однією унарною операцією

$$\perp : G(X) \to G(X), \quad \perp : \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^{\perp} = \{E \underset{cl}{\subset} X : \forall F \in \mathcal{F} \;\; E \cap F \neq \emptyset\},$$

що називається *операцією трансверсалі*. Ці операції наділяють простір $G(X)$ структурою симетричної ґратки.

Основним результатом третього розділу є дуальна характеризація 3.7.1 гіперпросторів включення зі скінченними носіями. За означенням, гіперпростір включення називається *гіперпростором включення зі скінченним носієм на* X, якщо він породжується скінченною сім'єю скінченних підмножин множини X. Ця характеризація суттєво використовуватиметься в теоремі 4.6.1 для опису топологічного центру напівгрупи $G(X)$ над дискретною групою X. Вона звучить наступним чином: гіперпростір включення $\mathcal{F}$ на T_1-просторі X має скінченний носій тоді і тільки тоді, коли гіперпростори включення $\mathcal{F}$ та $\mathcal{F}^{\perp}$ мають бази, що складаються зі скінченних множин.

В **четвертому розділі** ми вивчаємо напівгрупові операції на $G(S)$ і їх взаємозв'язок з ґратковою структурою $G(S)$. Ми доводимо, що алгебраїчна операція, визначена на дискретному просторі S, продовжується не тільки на $\beta(S)$, але також і на найменшу повну підґратку $G(S) \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(S))$, породжену множиною $\beta(S)$. Слідуючи Бурбакі, множину S, наділену бінарною операцією $*: S \times S \to S$, називатимемо *магмою* (часто вживається також альтернативний термін "групоїд"[2]). Магму S називатимемо *квазігрупою*, якщо для довільних $a, b \in S$ система рівнянь $a * x = b$ і $y * a = b$ має єдиний розвязок $(x, y) \in S \times S$.

Для довільної магми S простір гіперпросторів включення $G(S)$, наділений продовженою операцією, стає суперкомпактною правотопологічною магмою, що містить $\beta(S)$ як замкнену підмагму. Якщо операція на S асоціативна, то вона продовжується до асоціативної операції на $G(S)$, див. твердження 4.1.1. Далі, ми описуємо алгебраїчну та алгебро-топологічну структуру одержаних магм. Починаємо з ідентифікації правих нулів магми $G(S)$. Кажемо, що гіперпростір включення $\mathcal{A} \in G(S)$ є *інваріантним*, якщо для кожного $A \in \mathcal{A}$ і $x \in S$ множини $x * A$ і $x^{-1}A = \{y \in S : x * y \in A\}$ належать до $\mathcal{A}$. Через $\overset{\leftrightarrow}{G}(S)$ позначаємо множину всіх інваріантних гіперпросторів включення. Згідно з твердженням 4.4.1, гіперпростір включення $\mathcal{A} \in G(S)$ є інваріантним тоді і лише тоді, коли $\mathcal{A}$ є правим нулем в $G(S)$. Звідси випливає, що $\mathcal{A} \circ \mathcal{B} = \mathcal{B}$ для кожних $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \overset{\leftrightarrow}{G}(S)$. Таким чином, $\overset{\leftrightarrow}{G}(S)$ є напівгрупою правих нулів. Множина $\overset{\leftrightarrow}{G}(S)$ замкнена в $G(S)$ і є повною підґраткою ґратки $G(S)$, яка інваріантна відносно трансверсалі. Більше того, якщо $\overset{\leftrightarrow}{G}(S)$ є непорожньою, то вона є мінімальним ідеалом в $G(S)$. Множина $\overset{\leftrightarrow}{G}(S)$ є непорожньою, якщо для кожних $a, b \in S$ рівняння $a * x = b$ має розв'язок $x \in S$.

Для квазігрупи S (алгебраїчний) центр магми $G(S)$ збігається з центром S, див. теорему 4.5.2. Цікаво відмітити, що для довільної групи S центр напівгрупи $\beta(S)$ також збігається з центром групи S, див. теорему 6.54 з [55]. Нагадаємо, що *алгебраїчним центром* магми S називається множина елементів $c \in S$, що комутують з усіма іншими елементами S.

Під *топологічним центром* магми S, наділеної топологією, ми розуміємо множину $\Lambda(S)$, яка складається з усіх елементів $x \in S$, для яких ліві і праві

[2] Термін "групоїд" вживається в теорії категорій і гомологій для позначення цілком інших алгебраїчних структур, тому ми надаємо перевагу бурбакістському терміну "магма".

зсуви

$$l_x : S \to S, \;\; l_x : z \mapsto xz, \;\; \text{і} \;\; r_x : S \to S, \;\; r_x : z \mapsto zx$$

є неперервними. Для квазігрупи S топологічний центр магми $G(S)$ збігається з множиною $G^\bullet(S)$ всіх гіперпросторів включення зі скінченними носіями, див. теорему 4.6.1.

Скоротним елементам магми $G(S)$ присвячено **підрозділи 4.7 та 4.8**. У теоремі 4.7.1 доведено, що гіперпростір включення $\mathcal{F} \in G(S)$ на квазігрупі S є скоротним зліва в магмі $G(S)$ тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{F}$ є головним ультрафільтром. Цей результат контрастує з теоремою 8.34 з [55], яка стверджує, що множина скоротних (зліва) елементів напівгрупи $\beta(S)$ містить відкриту всюди щільну підмножину напівгрупи $\beta^\circ(S)$ вільних ультрафільтрів на S. Ситуація з скоротними справа елементами магми $G(S)$ дещо інша: гіперпростір включення $\mathcal{F} \in G(S)$ є скоротним справа в $G(S)$, за умови, що існує така сім'я множин $\{S_x\}_{x\in S} \subset \mathcal{F} \cap \mathcal{F}^\perp$, що $xS_x \cap yS_y = \emptyset$ для довільних різних елементів $x, y \in S$, див. твердження 4.8.2, з якої виводиться наступна характеризація скоротних справа ультрафільтрів в $G(S)$, що узагальнює відому характеризацію скоротних справа елементів напівгрупи $\beta(S)$, див. [55, теор. 8.11]. Для ультрафільтра $\mathcal{U}$ на зліченній магмі S наступні умови рівносильні:

1) $\mathcal{U}$ є скоротним справа в $G(S)$;

2) $\mathcal{U}$ є скоротним справа в $\beta(S)$;

3) індексована множина $\{x\mathcal{U} : x \in S\}$ є дискретною в $\beta(S)$;

4) існує така індексована сім'я множин $\{U_x\}_{x\in S} \subset \mathcal{U}$, що для довільних різних $x, y \in S$ зсуви $x\,U_x$ і $y\,U_y$ є неперетинними.

Цю характеризацію можна використати, щоб показати, що для довільної зліченної групи S напівгрупа $\beta^\circ(S)$ вільних ультрафільтрів містить відкриту всюди щільну підмножину скоротних справа ультрафільтрів, див. теорему 8.10 з [55]. Виявляється, що схожий результат можна довести для напівгрупи $G^\circ(S)$: для довільної зліченної групи S напівгрупа $G^\circ(S)$ містить відкриту всюди щільну підмножину скоротних справа вільних гіперпросторів включення, див. твердження 4.8.4.

Крім $\beta(S)$, напівгрупа $G(S)$ містить багато інших важливих підпросторів в якості замкнених піднапівгруп: суперрозширення $\lambda(S)$ простору S, простір $N_k(S)$ k-зчеплених гіперпросторів включення, простір $\mathrm{Fil}(S)$ фільтрів на S (який містить ізоморфну копію степінь-напівгрупи $\Gamma(S)$ напівгрупи S), і т.д.

Відмітимо, що напівгрупи $G(S)$, $\lambda(S)$, $N_k(S)$, $\mathrm{Fil}(S)$, $\beta(S)$ і $\Gamma(S)$ є частковими випадками функтор-напівгруп $F(S)$ над правотопологічними напівгрупами S, див. [29]. Поняття функтор-напівгрупи ввели А. Телейко і М. Зарічний в [66]. Вони довели, що кожен слабко нормальний монадичний функтор $F : \mathcal{C}omp \to \mathcal{C}omp$ в категорії компактів підіймається на категорію компактних топологічних напівгруп, тобто для кожної компактної топологічної напівгрупи S простір $F(S)$ має природну напівгрупову структуру, див. [4] і [66, § 3.4]. Властивості напівгруп $\exp(S)$ і $P(S)$ над топологічними напівгрупами S для функторів експоненти exp і ймовірнісних мір P детально вивчені в [31], [32] і [21].

Одним з найцікавіших підпросторів простору $G(S)$ гіперпросторів включення є суперрозширення $\lambda(S)$, що складається з усіх максимальних зчеплених систем. За означенням, сім'я підмножин $\mathcal{L}$ множини X називається *зчепленою*, якщо будь-які дві множини цієї сім'ї мають непорожній перетин. Така зчеплена система $\mathcal{L}$ називається *максимальною зчепленою*, якщо вона збігається з кожною зчепленою системою $\mathcal{M}$, що її містить. Суперрозширення $\lambda(X)$ простору X введено де Гротом в 1967 році, див. [51]. В 1968 році вийшла в світ праця де Грота, Г. Єнсена і А. Вербіка "Суперрозширення" [52]. Підсумок досліджень суперрозширень та суперкомпактності голландською топологічною школою (див. [51], [52], [68], [69] і ін.) був підведений у монографії Яна ван Мілла "Суперкомпактність та простори Волмена"[67].

Окрім голландців, вивченням топологічних властивостей суперрозширень займалися вітчизняні математики: М. Зарічний [5, 3, 2], А. Іванов [8], Т. Радул [19], Є. Мойсеєв [12, 13] і ін.

У **п'ятому розділі** ми вивчаємо алгебраїчну структуру суперрозширень $\lambda(X)$ груп X. Мотивацією для вивчення алгебраїчних і комбінаторних властивостей напівгрупи $\lambda(X)$ є той факт, що для кожної максимальної зчепленої системи $\mathcal{L}$ на X і кожного розбиття $X = A \cup B$ множини X на дві множини A і B, одна з них належить $\mathcal{L}$. Це дає можливість застосовувати максимальні зчеплені системи в комбінаториці чисел і теорії Рамсея.

Ми починаємо розділ, вивчаючи самозачеплені множини в групах. За означенням, множина A групи X називається *самозачепленою*, якщо $A \cap xA \neq \emptyset$ для всіх $x \in X$. В твердженні 5.1.1 ми даємо нижню і верхню оцінки для найменшої потужності $sl(X)$ самозачепленої множини в X. Ми використовуємо ці оцінки, щоб охарактеризувати групи X для яких $sl(X) \geq |X|/2$ в теоремі 5.1.2.

В **підрозділі 5.2** ми використовуємо самозачеплені множини для обчислення потужності напівгрупи $\overset{\leftrightarrow}{\lambda}(X)$ максимальних інваріантних зчеплених систем на групі X. В теоремі 5.2.4 ми покажемо, що для нескінченної групи X ця потужність дорівнює $2^{2^{|X|}}$. В твердженні 5.2.5 і теоремі 5.2.8 ми обчислимо потужність $\overset{\leftrightarrow}{\lambda}(X)$ для всіх скінченних груп X порядку $|X| \leq 8$, а також охарактеризуємо групи X з $|\overset{\leftrightarrow}{\lambda}(X)| = 1$. В **підрозділах 5.4 і 5.5** ці результати використовуватимуться для характеризації груп X, суперрозширення яких мають (праві) нулі або є комутативними. В твердженні 5.3.1 ми покажемо, що максимальна зчеплена система $\mathcal{L} \in \lambda(X)$ є правим нулем в $\lambda(X)$ тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{L}$ є інваріантною в тому розумінні, що $xL \in \mathcal{L}$ для всіх $L \in \mathcal{L}$ та $x \in X$. У теоремі 5.3.2 ми доведемо, що група X містить максимальну інваріантну зчеплену систему (рівносильно, $\lambda(X)$ містить правий нуль) тоді і тільки тоді, коли кожен елемент X має непарний порядок. Ситуація з (лівими) нулями є дещо іншою: максимальна зчеплена система $\mathcal{L} \in \lambda(X)$ є лівим нулем в $\lambda(X)$ тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{L}$ є нулем в $\lambda(X)$ тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{L}$ є єдиною інваріантною максимальною зчепленою системою на X. Напівгрупа $\lambda(X)$ має (лівий) нуль тоді і тільки тоді, коли X є скінченною групою непарного порядку $|X| \leq 5$. Напівгрупа $\lambda(X)$ є комутативною тоді і тільки тоді, коли група X має скінченний порядок $|X| \leq 4$, див. теорему 5.5.1. Цікаво зауважити, що напівгрупа ультрафільтрів $\beta(X)$ комутативна тоді і тільки тоді коли X скінченна комутативна група.

Далі, ми зосередимось на скоротності і центрах (топологічних і алгебраїчних) суперрозширень $\lambda(X)$ груп X. Оскільки $\lambda(X)$ є проміжною напівгрупою між $\beta(X)$ і $G(X)$, то одержані результати для $\lambda(X)$ в певному сенсі є проміжними між відповідними результатами для $\beta(X)$ і $G(X)$.

У **підрозділі 5.6** ми опишемо скоротні елементи в $\lambda(X)$. Зокрема, ми покажемо, що для скінченної групи X всі скоротні зліва чи скоротні справа елементи в $\lambda(X)$ є головними ультрафільтрами. З другого боку, якщо група X є зліченною, то множина скоротних справа елементів містить відкритий всюди щільний перетин з піднапівгрупою $\lambda^\circ(X) \subset \lambda(X)$ вільних максимальних зчеплених систем, див. теорему 5.6.5. Це нагадує ситуацію з напівгрупою $\beta(X)$, що містить всюди щільну відкриту підмножину скоротних справа елементів (див. [55, теор. 8.10]), а також з напівгрупою $G(X)$, скоротні справа елементи якої утворюють множину, що має відкритий всюди щільний перетин з множиною $G^\circ(X)$ вільних гіперпросторів включення, див. твердження 4.8.4.

Підрозділ 5.7 присвячується опису топологічного центру $\lambda(X)$. Згідно з [55], для кожної групи X топологічний центр напівгрупи $\beta(X)$ збігається з X. З другого боку, топологічний центр напівгрупи $G(X)$ збігається з підпростором $G^\bullet(X)$ простору $G(X)$, що складається з гіперпросторів включення зі скінченними носіями, див. теорему 4.6.1. Подібні результати виконуються також для напівгрупи $\lambda(X)$: для кожної не більш ніж зліченної групи X топологічний центр напівгрупи $\lambda(X)$ збігається з $\lambda^\bullet(X)$, див. теорему 5.7.4.

Підрозділ 5.8 присвячено опису алгебраїчного центру напівгрупи $\lambda(X)$. В теоремі 5.8.2 ми доведемо, що для кожної зліченної нескінченної групи X алгебраїчний центр напівгрупи $\lambda(X)$ збігається з алгебраїчним центром групи X. Цікаво відмітити, що для довільної групи X алгебраїчні центри напівгруп $\beta(X)$ і $G(X)$ також збігаються з центрами групи X, див. [55, теор. 6.54] і теорему 4.5.2. З іншого боку, для скінченних груп X порядку $3 \le |X| \le 5$ алгебраїчний центр напівгрупи $\lambda(X)$ є строго більшим ніж алгебраїчний центр групи X, див. підрозділ 5.11.

Розуміння структури мінімальних лівих ідеалів напівгрупи $\beta(X)$ має важливі комбінаторні застосування. Наприклад, властивості ультрафільтрів з мінімального лівого ідеалу напівгрупи $\beta(X)$ використовувалися в топологічному доведенні класичної теореми Ван дер Вардена [55, теор. 14.3], яке належить Фустенбергу і Катнельсону [43]. Мінімальні ліві ідеали напівгрупи $\beta(\mathbb{Z})$ відіграють важливу роль також в топологічній динаміці, див. [24], [25], [55, роз. 19]. Ми сподіваємося, що вивчення структури мінімальних (лівих) ідеалів напівгруп $\lambda(X)$ також буде мати комбінаторні застосування.

Одним з основних результатів п'ятого розділу є теорема 5.10.1, яка стверджує, що мінімальні ліві ідеали напівгрупи $\lambda(\mathbb{Z})$ є компактними метризовними топологічними напівгрупами, ізоморфними мінімальним лівим ідеалам суперрозширення $\lambda(\mathbb{Z}_2)$ групи $\mathbb{Z}_2$ цілих 2-адичних чисел.

Насамкінець, у **підрозділі 5.11** ми описуємо алгебраїчну структуру суперрозширень $\lambda(X)$ груп X порядку $|X| \le 5$.

Очікується, що дослідження алгебраїчних структур на суперрозширеннях та просторах гіперпросторів включення проллє світло на деякі відомі проблеми комбінаторики, що не розв'язуються з допомогою ультрафільтрів. Зокрема, це стосується проблеми Овінґса про існування нескінченної одноколірної множини виду $A + A$ у довільному двоколірному розфарбуванні натурального ряду.

РОЗДІЛ 2
ДОПОМІЖНІ ОЗНАЧЕННЯ ТА РЕЗУЛЬТАТИ

2.1. Напівгрупи та магми

Множину X, наділену бінарною операцією $* : X \times X \to X$, називатимемо *магмою.* Підмножина A магми $(X, *)$ називається *підмагмою* X, якщо $A*A \subset A$, де $A * A = \{a * b : a, b \in A\}$. Якщо операція є асоціативною, то X називається *напівгрупою.* Відображення $h : X_1 \to X_2$ між двома магмами $(X_1, *_1)$ та $(X_2, *_2)$ називається *гомоморфізмом*, якщо $h(x *_1 y) = h(x) *_2 h(y)$ для всіх $x, y \in X_1$.

Непорожня підмножина I магми $(X, *)$ називається *ідеалом* (відповідно *правим ідеалом*, *лівим ідеалом*), якщо $I * X \cup X * I \subset I$ (відповідно $I * X \subset I$, $X * I \subset I$). Елемент z магми $(X, *)$ називається *нулем* (відповідно *лівим нулем*, *правим нулем*) в X, якщо $x * z = z * x = z$ (відповідно $z * x = z$, $x * z = z$) для кожного $x \in X$. Це еквівалентно тому, що z є ідеалом (відповідно правим ідеалом, лівим ідеалом) в X. Кожен правий чи лівий нуль $z \in X$ є *ідемпотентом* в тому розумінні, що $z * z = z$.

Напівгрупа $(X, *)$ називається *напівгрупою правих нулів*, якщо $x * y = y$ для всіх $x, y \in X$.

За означенням, (алгебраїчним) *центром* магми X називається множина

$$C = \{x \in X : \forall y \in X \;\; xy = yx\}.$$

Під *топологічним центром* магми X, наділеної топологією, ми розуміємо множину $\Lambda(X)$, яка складається з всіх таких елементів $x \in X$, що ліві і праві зсуви

$$l_x : X \to X, \;\; l_x : z \mapsto xz, \quad \text{і} \;\; r_x : X \to X, \;\; r_x : z \mapsto zx$$

є неперервними.

Елемент a магми X називається *скоротним зліва* (відповідно *скоротним справа*), якщо для довільних елементів $x, y \in X$ з рівності $ax = ay$ (відповідно

$xa = ya$) випливає, що $x = y$. Це рівносильно тому, що лівий (відповідно правий) зсув $l_a : X \to X$, $l_a : x \mapsto a * x$, (відповідно $r_a : X \to X$, $r_a : x \mapsto x * a$) є ін'єктивним.

Магма X називається *квазігрупою*, якщо для кожних $a, b \in X$ система рівнянь $a * x = b$ і $y * a = b$ має єдиний розв'язок $(x, y) \in X \times X$. Очевидно, що кожна група є квазігрупою. З другого боку, є багато прикладів квазігруп, не ізоморфних групам, див. [60], [35].

Елемент a напівгрупи S називається *регулярним*, якщо $a \in aSa$. Якщо кожен елемент напівгрупи S є регулярним, то напівгрупа S називається *регулярною*. Кажемо, що два елементи a і b напівгрупи S є інверсними, якщо $aba = a$ і $bab = b$. Якщо для кожного елемента напівгрупи існує єдиний інверсний до нього елемент, то напівгрупа називається *інверсною*. Напівгрупа, яка є об'єднанням груп, називається *кліфордовою*.

Під *G-простором* ми розуміємо множину X, наділену лівою дією $G \times X \to X$ групи G. Кожна група G розглядатиметься як G-простір, наділений лівою дією G. Важливим прикладом G-простору є фактор-простір $G/H = \{xH : x \in G\}$ групи G за підгрупою $H \subset G$.

Зробимо декілька зауважень щодо структури напівгрупи S, що містить підгрупу G. В цьому випадку S можна розглядати як G-простір, наділений лівою дією групи G. Отже, ми можемо розглядати простір орбіт $S/G = \{Gs : s \in S\}$ і проекцію $\pi : S \to S/G$. Якщо G міститься в центрі напівгрупи S (тобто елементи G комутують з усіма елементами напівгрупи S), тоді простір орбіт S/G володіє єдиною напівгруповою операцією, що перетворює S/G на напівгрупу і проекцію $\pi : S \to S/G$ на напівгруповий гомоморфізм. Кажемо, що напівгрупа S є *розщеплюваною*, якщо існує такий напівгруповий гомоморфізм $s : S/G \to S$, що $\pi \circ s$ є тотожнім гомоморфізмом на S/G. Такий гомоморфізм s називається *селекцією* гомоморфізму π і напівгрупа $T(G) = s(S/G)$ називається *G-трансверсальною напівгрупою* напівгрупи S. Очевидно, що G-трансверсальна напівгрупа $T(G)$ має одноточковий перетин з кожною орбітою напівгрупи S.

Якщо напівгрупа S є розщеплюваною, то структуру S можна описати наступним чином.

Твердження 2.1.1. *Якщо напівгрупа S є розщеплюваною і $T(G)$ є трансверсальною напівгрупою напівгрупи S, то $T(G)$ ізоморфна S/G і S є фактор-напівгрупою добутку $T(G) \times G$ відносно гомоморфізму $h : T(G) \times G \to S$, $h : (a, h) \mapsto ah$.*

Звернемо увагу на деякі позначення. Слідуючи алгебраїчним традиціям через C_n позначатимемо циклічну групу порядку n, а через D_{2n} – діедральну групу порядку $2n$. Через $\mathbb{Z}_p$, де p – просте число, позначаємо групу цілих p-адичних чисел. Нагадаємо, що $\mathbb{Z}_p = \varprojlim C_{p^k}$ є границею оберненої послідовності

$$\cdots \to C_{p^n} \to \cdots \to C_{p^3} \to C_{p^2} \to C_p$$

циклічних p-груп C_{p^n}.

2.2. Компактні правотопологічні напівгрупи

У цьому підрозділі ми пригадаємо деякі відомі факти про правотопологічні напівгрупи та магми. За означенням, *правотопологічною магмою* називається топологічний простір S, наділений такою бінарною операцією $* : S \times S \to S$, що для кожного $a \in S$ правий зсув $r_a : S \to S$, $r_a : x \mapsto x * a$, є неперервним. Якщо бінарна операція $* : S \times S \to S$ є неперервною, то $(S, *)$ називається *топологічною магмою.* Якщо ця операція є асоціативною, то говоримо про *(право)топологічні напівгрупи.*

Відмітимо, що для кожного елемента x напівгрупи S множина $Sx = \{sx : s \in S\}$ (відповідно, $xS = \{xs : s \in S\}$) є лівим (відповідно, правим) ідеалом в S. Такий ідеал називається *головним.* Ідеал $I \subset S$ називається *мінімальним*, якщо кожен ідеал напівгрупи S, що міститься в I, співпадає з I. Аналогічно визначаються мінімальні ліві і праві ідеали напівгрупи S. Легко бачити, що кожен мінімальний лівий (відповідно правий) ідеал I є головним. Більше того,

$I = Sx$ (відповідно $I = xS$) для кожного $x \in I$. З цього простого спостереження випливає, що кожен мінімальний лівий ідеал правотопологічної напівгрупи S є замкненим в S. Згідно [55, нас. 2.6], кожен лівий ідеал в компактній правотопологічній напівгрупі S містить мінімальний лівий ідеал. Об'єднання $K(S)$ всіх мінімальних лівих (правих) ідеалів в S співпадає з мінімальним ідеалом напівгрупи S, див. [55, теор. 2.8].

За теоремою 2.5 з [55], кожна компактна правотопологічна напівгрупа містить ідемпотент. Ідемпотенти мінімального ідеалу $K(S)$ відіграють важливу роль в розумінні структури $K(S)$. Більш точно, за теоремою 2.9 з [55] для кожного ідемпотента e мінімального ідеалу $K(S)$ виконуються наступні твердження:

- Se є мінімальним лівим ідеалом в S;
- eS є мінімальним правим ідеалом в S;
- $SeS = K(S)$ є мінімальним ідеалом напівгрупи S;
- eSe збігається з максимальною підгрупою $H(e)$, що містить ідемпотент e.
- $\{Se : e \in E(K(S))\}$, $\{eS : e \in E(K(S))\}$ і $\{eSe : e \in E(K(S))\}$ розбивають мінімальний ідеал $K(S)$ на неперетинні класи, де через $E(K(S))$ позначається множина всіх ідемпотентів $K(S)$.

За теоремою 2.11 з [55], всі мінімальні ліві ідеали в S гомеоморфні і всі максимальні підгрупи мінімального ідеалу $K(S)$ є алгебраїчно ізоморфними. Більше того, якщо дві максимальні групи містяться в одному мінімальному правому ідеалі, то вони є топологічно ізоморфними.

В подальшому ми часто використовуватимемо наступну лему.

Лема 2.2.1. *Нехай X, Y – компактні правотопологічні напівгрупи. Якщо напівгруповий гомоморфізм $h : X \to Y$ є ін'єктивним на деякому мінімальному лівому ідеалі напівгрупи X, то h є ін'єктивним на кожному мінімальному лівому ідеалі напівгрупи X.*

Доведення. Припустимо, що h є ін'єктивним на мінімальному лівому ідеалі Xa і розглянемо довільний інший мінімальний лівий ідеал Xb напівгрупи X. Згідно з [55, теор. 2.11], правий зсув $r_a : X \to X$, $r_a : x \mapsto xa$, є ін'єктивним на Xb. Далі, розглянемо правий зсув $r_{h(a)} : Y \to Y$, $r_{h(a)} : y \mapsto y \cdot h(a)$. З рівності $h \circ r_a = r_{h(a)} \circ h$ і ін'єктивності відображень $r_a|Xb$ і $h|Xa$, випливає, що відображення $h|Xb$ – ін'єктивне. □

2.3. Функтори G і λ в категорії компактів

Через $\exp(X)$ позначимо множину всіх непорожніх замкнених підмножин топологічного простору X, наділену топологією Вієторіса, тобто топологією, породженою базою, що складається з усіх множин вигляду

$$\langle U_1, \dots, U_n \rangle = \{C \in \exp(X) : C \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \text{ і } \forall i \le n \;\; C \cap U_i \neq \emptyset\},$$

де $U_1, \dots, U_n$ – відкриті підмножини простору X.

Нагадаємо деякі відомі факти про топологію Вієторіса. Згідно з [20, § IV.3], для T_1-простору X гіперпростір $\exp(X)$ гаусдорфовий тоді і тільки тоді, коли X – регулярний. Нормальність T_1-простору X рівносильна (цілком) регулярності простору $\exp(X)$, а компактність X — нормальності (і компактності) гіперпростору $\exp(X)$, див. [22, теор. 2.7.20, теор. 3.12.26]. Топологія Вієторіса на гіперпросторі $\exp(\mathbb{N})$ дискретного простору $\mathbb{N}$ добре відома в дескриптивній теорії множин під назвою топології Еллентука. Простір $\exp(\mathbb{N})$ з цією топологією не є нормальним, див. [57, теор. 19.D] чи [22, теор. 3.12.26]. Як наслідок, друга експонента $\exp^2(\mathbb{N}) = \exp(\exp(\mathbb{N}))$ не є регулярним простором. В подальшому запис $A \underset{cl}{\subset} X$ (відповідно $A \underset{op}{\subset} X$) означає, що A є замкненою (відповідно відкритою) множиною простору X.

Означення 2.3.1. Підмножина $\mathcal{A} \subset \exp(X)$ називається *монотонною*, якщо із $\mathcal{A} \ni A \subset B \underset{cl}{\subset} X$ випливає, що $B \in \mathcal{A}$. Замкнені монотонні підмножини $\mathcal{A} \subset \exp(X)$ називаються *гіперпросторами включення* на X.

Множина всіх гіперпросторів включення на X позначається через $G(X)$ і наділяється топологією, індукованою з $\exp^2(X)$.

Якщо X – компакт, то індукована топологія на $G(X)$ породжується передбазою, що складається з множин вигляду

$$U^+ = \{\, \mathcal{A} \in G(X) \mid \text{ існує } B \in \mathcal{A},\ B \subset U \,\} \text{ і}$$

$$U^- = \{\, \mathcal{A} \in G(X) \mid B \cap U \neq \emptyset \text{ для кожного } B \in \mathcal{A} \,\},$$

де U пробігає сім'ю відкритих в X підмножин.

Для кожного відображення $f : X \to Y$ між компактами X та Y відображення $Gf : G(X) \to G(Y)$ задається формулою

$$Gf(\mathcal{A}) = \{\, B \in \exp(Y) \mid B \supset f(A) \text{ для деякого } A \in \mathcal{A}\},\ \mathcal{A} \in G(X).$$

Якщо відображення $f : X \to Y$ є неперервним, то $Gf : G(X) \to G(Y)$ також є неперервним відображенням. В твердженні 2.3.2 з [66] доведено, що конструкція G визначає слабко нормальний коваріантний функтор в категорії **Comp** компактів і неперервних відображень.

Означення 2.3.2. Сім'я $\mathcal{L}$ замкнених підмножин простору X називається *зчепленою системою* на X, якщо будь-які два елементи цієї сім'ї перетинаються.

Означення 2.3.3. Зчеплена система $\mathcal{M} \subset \exp(X)$ називається *максимальною зчепленою системою*, якщо вона не є власною підмножиною жодної іншої зчепленої системи.

Множина всіх максимальних зчеплених систем в $G(X)$ називається суперрозширенням простору X, позначається $\lambda(X)$ і наділяється топологією, індукованою з $G(X)$.

В [66] доведено, що $Gf(\lambda(X)) \subset \lambda(Y)$ і, отже, λ є слабко нормальним підфунктором функтора G.

РОЗДІЛ 3
ГІПЕРПРОСТОРИ ВКЛЮЧЕННЯ

Метою третього розділу є продовження конструкції простору $G(X)$ гіперпросторів включення поза межі компактів, де ця конструкція добре вивчена, див. [66]. Добре відомо, що конструкція простору гіперпросторів включення є функторіальною в категорії компактів. В цьому розділі ми продовжимо цю конструкцію на категорію нормальних топологічних просторів і покажемо, що для нормального простору X простір $G(X)$ канонічно гомеоморфний $G(\beta X)$, де $\beta(X)$ – компактифікація Стоуна-Чеха простору X.

3.1. Гіперпростори включення

У цьому підрозділі ми доведемо характеризаційну теорему, яка допоможе виявляти гіперпростори включення.

Гіперпростори включення часто виникають як замикання монотонних підмножин гіперпростору $\exp(X)$.

Твердження 3.1.1. *Замикання* $\mathrm{cl}_{\exp(X)}(\mathcal{A})$ *монотонної підмножини* $\mathcal{A} \subset \exp(X)$ *в* $\exp(X)$ *є гіперпростором включення на* X.

Доведення. Необхідно довести, що замкнена підмножина $B \subset X$ належить $\mathrm{cl}_{\exp(X)}(\mathcal{A})$, якщо вона містить підмножину $A \in \mathrm{cl}_{\exp(X)}(\mathcal{A})$. Нехай $\langle W_1, \ldots, W_m \rangle$ – базовий окіл точки $B \in \exp(X)$. Тоді $B \subset W_1 \cup \ldots \cup W_m$. Оберемо ті множини W_i, що перетинають A. Якщо це множини $W_{l_1}, \ldots, W_{l_k}$, то $A \in \langle W_{l_1}, \ldots, W_{l_k} \rangle$. Оскільки A – точка дотику сім'ї $\mathcal{A}$, то існує $A' \in \mathcal{A} \cap \langle W_{l_1}, \ldots, W_{l_k} \rangle$. Із монотонності сім'ї $\mathcal{A} \ni A'$ випливає, що $A' \cup B \in \mathcal{A} \cap \langle W_1, \ldots, W_n \rangle$. Тобто B є точкою дотику $\mathcal{A}$ в $\exp(X)$. $\square$

З цього твердження випливає, що кожна непорожня сім'я $\mathcal{B}$ непорожніх підмножин топологічного простору X породжує гіперпростір включення

$$\overline{\uparrow\mathcal{B}} = \mathrm{cl}_{\exp(X)}\{F \underset{cl}{\subset} X : \exists B \in \mathcal{B} \;\; B \subset F\}.$$

Сім'я $\mathcal{B}$ підмножин X називається *базою* гіперпростору $\mathcal{F}$, якщо $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ і $\mathcal{F} = \overline{\uparrow\mathcal{B}}$.

Наступна характеризаційна теорема дозволяє означити гіперпростори включення без апеляції до топології Вієторіса.

Характеризаційна теорема 3.1.2. *Сім'я $\mathcal{A}$ непорожніх замкнених підмножин топологічного простору X є гіперпростором включення тоді і тільки тоді, коли виконана наступна умова: замкнена підмножина $F \subset X$ належить $\mathcal{A}$, якщо будь-який її окіл U містить множину $A \in \mathcal{A}$.*

Доведення. Нехай $\mathcal{A}$ — гіперпростір включення на X. Необхідно довести, що замкнена підмножина $F \subset X$ належить сім'ї $\mathcal{A}$ за умови, що кожен окіл U множини $F \subset X$ містить множину $A \in \mathcal{A}$. Для цього досить перевірити, що F – точка дотику множини $\mathcal{A}$ у гіперпросторі $\exp(X)$. Для довільного базового околу $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ точки F у просторі $\exp(X)$, об'єднання $U_1 \cup \ldots \cup U_n$ є околом множини F і, отже, містить деяку множину $A \in \mathcal{A}$, згідно з нашим припущенням. Тоді замкнена множина $F \cup A$ належить до $\mathcal{A} \cap \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$, і F – точка дотику множини $\mathcal{A}$.

Тепер припустимо, що для сім'ї $\mathcal{A}$ замкнених непорожніх підмножин топологічного простору X виконано умову: замкнена підмножина $F \subset X$ належить $\mathcal{A}$, якщо будь-який її окіл U містить множину $A \in \mathcal{A}$. Покажемо, що $\mathcal{A}$ є гіперпростором включення.

По-перше, зауважимо, що із цієї умови тривіально виводиться, що сім'я разом із множиною $A \in \mathcal{A}$ містить усі її замкнені надмножини. Залишилось встановити замкненість множини $\mathcal{A}$ у гіперпросторі $\exp(X)$. Дійсно, нехай $F \underset{cl}{\subset} X$ – точка дотику множини $\mathcal{A}$ в $\exp(X)$. Якщо $U \supset F$ – відкрита, то $\langle U \rangle$ – окіл точки F в $\exp(X)$, і в ньому міститься деяка точка $A \in \mathcal{A}$, тобто $A \subset U$. З умови теореми випливає, що $F \in \mathcal{A}$. Отже, множина $\mathcal{A}$ – замкнена в $\exp(X)$ і виконано означення 2.3.1. $\square$

Зауважимо, що твердження 3.1.1 можна альтернативно довести, використовуючи характеризаційну теорему 3.1.2.

Зауваження 3.1.3. Оскільки кожна підмножина дискретного простору є відкрито-замкненою, у дискретному випадку характеризаційна теорема 3.1.2 спрощується до наступної: сім'я $\mathcal{A}$ непорожніх підмножин дискретного топологічного простору X є гіперпростором включення тоді і лише тоді, коли $\mathcal{A}$ є монотонною. В цьому випадку для гіперпростору включення $\mathcal{F} = \overline{\uparrow\mathcal{B}}$, породженого базою $\mathcal{B}$, використовуємо позначення $\mathcal{F} = \uparrow\mathcal{B}$.[1]

3.2. Простір $G(X)$ і його топологізація

Через $G(X)$ позначається множина всіх гіперпросторів включення на топологічному просторі X. Оскільки елементи $\mathcal{A} \in G(X)$ є замкненими підмножинами гіперпростору $\exp(X)$, то множину $G(X)$ можна ототожнити з підмножиною другої експоненти $\exp^2(X)$ і наділити $G(X)$ індукованою топологією. Такий підхід добре працює у випадку компактного X. Більше того, у цьому випадку індукована топологія на $G(X)$ породжується передбазою, що складається з множин вигляду

$$U^+ = \{\, \mathcal{A} \in G(X) \mid \text{ існує } B \in \mathcal{A},\ B \subset U \,\} \text{ і}$$

$$U^- = \{\, \mathcal{A} \in G(X) \mid B \cap U \neq \emptyset \text{ для кожного } B \in \mathcal{A} \},$$

де U пробігає сім'ю відкритих в X підмножин. Для некомпактних X топологія другої експоненти, взагалі кажучи, має погані властивості (зокрема, вона не є регулярною вже для простору $\exp^2(\mathbb{N})$).

---

[1] В розділах 4 і 5 вживаємо також позначення $\mathcal{F} = \langle\mathcal{B}\rangle$.

Тому надалі на множині $G(X)$ ми розглядатимемо топологію, породжену передбазою, що складається з множин вигляду U^+ та U^-, де U пробігає топологію простору X. Ця топологія на $G(X)$ має цілком добрі властивості. Зокрема справедлива

Теорема 3.2.1. *$G(X)$ є суперкомпактним T_1-простором для довільного топологічного простору X.*

Нагадаємо, що топологічний простір називається *суперкомпактним*, якщо з довільного відкритого покриття елементами деякої його передбази можна вибрати двоелементне підпокриття.

Доведення. Спершу доведемо, що $G(X)$ є T_1-простором. Нехай $\mathcal{F},\mathcal{U} \in G(X)$, $\mathcal{F} \neq \mathcal{U}$. Без обмеження загальності можна вважати, що існує $F \in \mathcal{F} \backslash \mathcal{U}$. Оскільки $F \notin \mathcal{U}$, то за характеризаційною теоремою 3.1.2, існує такий окіл $V \supset F$, що для будь-якого $G \in \mathcal{U}$ множина G не міститься в околі V, тобто $\mathcal{U} \notin V^+$ і одночасно $\mathcal{F} \in V^+$.

З іншого боку, для будь-якого $G \in \mathcal{U}$ множина G не міститься в F, тобто $G \cap (X \backslash F) \neq \emptyset$ і $\mathcal{U} \in (X \backslash F)^-$. Оскільки $F \cap (X \backslash F) = \emptyset$, то $\mathcal{F} \notin (X \backslash F)^-$.

Тепер покажемо, що $G(X)$ є суперкомпактним простором. Нехай $G(X)$ є об'єднанням елементів канонічної передбази, тобто

$$G(X) = \bigcup_{i \in I} U_i^- \cup \bigcup_{j \in J} V_j^+.$$

Якщо $X = U_i$ для деякого $i \in I$ або $X = V_j$ для деякого $j \in J$, то одержуємо $U_i^- = G(X)$ чи $V_j^+ = G(X)$ і твердження доведено. Надалі вважатимемо, що $X \neq U_i$ і $X \neq V_j$ для всіх $i \in I$, $j \in J$.

Якщо $I = \emptyset$, то ми одержуємо покриття

$$G(X) = \bigcup_{j \in J} V_j^+.$$

Взявши до уваги, що $V_j \neq X$ для кожного j, ми одержуємо, що $\{X\} \in G(X)$, $\{X\} \notin \bigcup\limits_{j \in J} V_j^+$ – протиріччя. Отже, $X = V_j$ для деякого j і $G(X) = V_j^+$.

Нехай $I \neq \emptyset$. Розглянемо сім'ю $\mathcal{F}' = \{F \subset X \mid F \supset X \backslash U_i$ для деякого $i \in I\}$ та її замикання $\mathcal{F} = \mathrm{cl}_{\exp(X)} \mathcal{F}'$, яке є гіперпростором включення, згідно з твердженням 3.1.1.

З того, що $X \setminus U_i \in \mathcal{F}$ випливає $\mathcal{F} \notin U_i^-$ для всіх $i \in I$. Отже, $\mathcal{F} \in V_{j_0}^+$ для деякого $j_0 \in J$, тобто існує $F' \in \mathcal{F}$ з $F' \subset V_{j_0}$. Оскільки

$$F' \in \mathrm{cl}_{\exp(X)}\{F \subset X : F \supset X\backslash U_i \text{ для деякого } i\} \cap \langle V_{j_0}\rangle,$$

то існує $F'' \in \langle V_{j_0}\rangle$ і $F'' \in \mathcal{F}'$. Таким чином, для деякого $i \in I$ маємо $X\backslash U_i \subset F'' \subset V_{j_0}$ і, отже, $U_i \cup V_{j_0} = X$. Покажемо, що $U_i^- \cup V_{j_0}^+ = G(X)$. Якщо $\mathcal{F} \notin V_{j_0}^+$, то для будь-якого $F \in \mathcal{F}$ множина F не міститься в V_{j_0} і тому $F \cap (X\backslash V_{j_0}) \neq \emptyset$. З іншого боку, з $X\backslash V_{j_0} \subset U_i$ випливає, що $F \cap U_i \neq \emptyset$ і $\mathcal{F} \in U_i^-$.

□

Нагадаємо, що топологічний простір X називається T_4-*простором*, якщо будь-які неперетинні замкнені підмножини X мають неперетинні відкриті околи.

Твердження 3.2.2. *Якщо X – T_4-простір, то $G(X)$ – T_2-простір.*

Доведення. Нехай $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1 \in G(X)$, $\mathcal{F}_0 \neq \mathcal{F}_1$, тоді, не обмежуючи загальності, можна вважати, що існує $F_0 \in \mathcal{F}_0\backslash\mathcal{F}_1$. За характеризаційною теоремою 3.1.2, існує окіл W множини F_0, в якому не міститься жодна множина, яка є елементом гіперпростору $\mathcal{F}_1$. Оскільки для простору X виконано аксіому віддільності T_4, то для околу W множини F_0 існує такий окіл $W_0 \supset F_0$, що $\mathrm{cl}\, W_0 \subset W$ і, отже, $\mathcal{F}_0 \in W_0^+$. Позначимо $W_1 = X \setminus \mathrm{cl}\, W_0$, тоді $W_0 \cap W_1 = \emptyset$. Переконаємось, що $\mathcal{F}_1 \in W_1^-$. Дійсно, в протилежному випадку знайдеться така $F \in \mathcal{F}_1$, що $F \cap W_1 = \emptyset$. Отже, $F \subset \mathrm{cl}\, W_0 \subset W$, і одержуємо суперечність з вибором околу W.

Покажемо, що $W_0^+ \cap W_1^- = \emptyset$. Якщо $\mathcal{F} \in W_0^+$, то існує $F \in \mathcal{F}$, що $F \subset W_0$, тобто $F \cap (X\backslash W_0) = \emptyset$. Отже, $F \cap W_1 = \emptyset$ і $\mathcal{F} \notin W_1^-$.

□

У підрозділі 3.4, використовуючи розширення Волмена, ми частково обернемо твердження 3.2.2 і доведемо, що для T_1-простору X гаусдорфовість $G(X)$ еквівалентна нормальності X.

3.3. Канонічне вкладення X в $G(X)$

Для точки x топологічного простору X розглянемо монотонну сім'ю

$$i_X(x) = \overline{\uparrow x} = \mathrm{cl}_{\exp(X)}\{F \underset{cl}{\subset} X : x \in F\},$$

яка є гіперпростором включення згідно з твердженням 3.1.1. Таким чином, визначено відображення

$$i_X : X \to G(X),\ i_X : x \mapsto \overline{\uparrow x}.$$

Твердження 3.3.1. *Для топологічного простору X наступні умови еквівалентні:*

1) *X – T_1-простір;*
2) *$i_X : X \to G(X)$ ін'єктивне і неперервне;*
3) *$i_X : X \to G(X)$ є топологічним вкладенням.*

Доведення. (1) $\Rightarrow$ (3) Нехай X – T_1-простір. Спершу доведемо, що $i_X(x) = \{F \in \exp(X) : x \in F\}$ для кожного $x \in X$. Для цього досить перевірити, що сім'я $\uparrow x = \{F \in \exp(X) : x \in F\}$ є замкненою в $\exp(X)$. Справді, для кожного $F \in \exp(X) \setminus \uparrow x$ множина $\langle X \setminus \{x\}\rangle$ є відкритим околом F, який не перетинає $\uparrow x$.

З рівності $i_X(x) = \uparrow x$ випливає, що $i_X^{-1}(V^+) = V = i_X^{-1}(V^-)$ для кожної відкритої множини $V \subset X$. Звідки і випливає, що відображення $i_X : X \to G(X)$ – топологічне вкладення.

Імплікація (3) $\Rightarrow$ (2) є тривіальною, а (2) $\Rightarrow$ (1) випливає з теореми 3.2.1 і того факту, що топологічний простір є T_1-простором, якщо з нього існує ін'єктивне неперервне відображення в T_1-простір. $\square$

Наведемо прості приклади просторів X, для яких i_X не є топологічним вкладенням.

Приклад 3.3.2. Розглянемо топологічний простір $X = \{a, b, c\}$ з топологією $\tau = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$. Для нього виконується аксіома віддільності T_0, але він не є T_1-простором. Тоді:

$i_X(a) = \big\{\{a\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\big\}$

$i_X(b) = \big\{\{a, b, c\}\big\}$

$i_X(c) = \big\{\{c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\big\}$

$i_X^{-1}(\{a, b\}^+) = \{a\}$ – не є відкритою в просторі X. Таким чином, відображення $i_X : X \to G(X)$ ін'єктивне і розривне.

Приклад 3.3.3. Розглянемо зв'язну двокрапку, тобто простір $X = \{a, b\}$ з топологією $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$. Тоді:

$i_X(a) = \mathrm{cl}_{\exp(X)}\{\{a, b\}\} = \{\{b\}, \{a, b\}\}$

$i_X(b) = \mathrm{cl}_{\exp(X)}\{\{b\}, \{a, b\}\} = \{\{b\}, \{a, b\}\}$

Даний приклад показує існування T_0-простору для якого відображення $i_X : X \to G(X)$ неперервне і не ін'єктивне.

Приклад 3.3.4. Топологічна сума просторів, розглянутих в попередніх двох прикладах, дає T_0-простір X, для якого відображення $i_X : X \to G(X)$ розривне і не ін'єктивне.

3.4. Зв'язок з розширенням Волмена

У цьому підрозділі ми покажемо, що для T_1-простору X простір $G(X)$ містить розширення Волмена $\omega(X)$ простору X, що дає можливість використовувати відому інформацію про простори Волмена при вивченні просторів $G(X)$. Спершу нагадаємо деякі означення.

Означення 3.4.1. Сім'я $\mathcal{F}$ замкнених підмножин топологічного простору X називається *фільтром замкнених множин*, якщо виконано наступні умови:

F1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$;

F2) якщо $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, то $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$;

F3) якщо $F \in \mathcal{F}$, $F \subset F'$, то $F' \in \mathcal{F}$.

Фільтр замкнених множин $\mathcal{F}$ на X називається *замкненим фільтром* на X, якщо $\mathcal{F}$ є замкненою підмножиною в $\exp(X)$.

Таким чином, замкненими фільтрами на X є гіперпростори включення, замкнені відносно скінченних перетинів.

Означення 3.4.2. Фільтр замкнених множин, який є максимальним відносно відношення включення, називається *ультрафільтром замкнених множин.*

Твердження 3.4.3. *Кожен ультрафільтр замкнених множин на T_1-просторі X є замкненим фільтром і, отже, належить $G(X)$.*

Доведення. Нехай $\mathcal{U}$ – ультрафільтр замкнених множин на просторі X. Щоб переконатися, що $\mathcal{U}$ є гіперпростором включення, застосуємо характеризаційну теорему 3.1.2. Нехай $F \subset X$ замкнена множина, будь-який окіл якої містить множину з $\mathcal{U}$. Потрібно показати, що $F \in \mathcal{U}$. Якщо б це було не так, то з максимальності $\mathcal{U}$ випливало би існування множини $A \in \mathcal{U}$, яка не перетинає F. Але тоді $X \setminus A$ – відкритий окіл F, який не містить жодної множини з $\mathcal{U}$, що суперечить вибору F. $\square$

Означення 3.4.4. Множина $\omega(X)$ всіх замкнених ультрафільтрів з топологією, породженою базою $\{U^+ \mid U \underset{op}{\subset} X\}$, називається *розширенням Волмена* простору X.

Із твердження 3.4.3 випливає, що розширення Волмена можна трактувати як підмножину простору $G(X)$.

Твердження 3.4.5. *Якщо X – T_1-простір, то розширення Волмена $\omega(X)$ є підпростором простору $G(X)$.*

Доведення. Базу топології на просторі $\omega(X)$ утворюють множини вигляду:

$$U^+ = \{\, \mathcal{A} \in \omega(X) \mid \text{існує } B \in \mathcal{A},\ B \subset U \,\},$$

де U пробігає сім‘ю відкритих в X підмножин.

Доведемо, що топологія, індукована на $\omega(X)$ з $G(X)$, збігається з топологією простору $\omega(X)$. Для цього досить показати, що $\omega(X) \cap U^- = \omega(X) \cap U^+$. Покажемо, що для будь-якого $\mathcal{U} \in \omega(X) \cap U^-$ існує $F \in \mathcal{U}$ з $F \subset U$, тобто $\mathcal{U} \in \omega(X) \cap U^+$. Припустимо протилежне: нехай існує $\mathcal{U}_0$, таке, що для будь-якого $F \in \mathcal{U}_0$ $F \cap (X \backslash U) \neq \emptyset$. Але тоді $X \backslash U \in \mathcal{U}_0$ і $(X \backslash U) \cap U = \emptyset$ – протиріччя.

Перевіримо включення $\omega(X) \cap U^+ \subset \omega(X) \cap U^-$. Нехай $\mathcal{U} \in \omega(X) \cap U^+$, тоді існує $F' \in \mathcal{U}$ для якого $F' \subset U$. Якщо б існували такі $\mathcal{U}_0$ і $F_0 \in \mathcal{U}_0$, що $F_0 \cap U = \emptyset$, то було б виконано $F_0 \cap F' = \emptyset$, і отримуємо суперечність з означенням фільтра. □

Таким чином, для T_1-простору X отримуємо ланцюжок вкладень:

$$X \subset \omega(X) \subset G(X).$$

Наслідок 3.4.6. *Для T_1-простору X наступні умови еквівалентні:*

1) *X нормальний;*
2) *$\omega(X)$ гаусдорфів;*
3) *$G(X)$ гаусдорфів.*

Доведення. Імплікація 1) $\Rightarrow$ 3) доведена у твердженні 3.2.2, 3) $\Rightarrow$ 2) тривіальна, а 2) $\Rightarrow$ 1) доведена в теоремі 3.6.22. [22, с.273-274]. □

Зауваження 3.4.7. Еквівалентність пунктів 1) і 3) вперше була доведена Є.Мойсєєвим [13] (іншим методом).

3.5. Гіперпростори включення зі скінченними носіями

В цьому підрозділі ми вивчатимемо вільні гіперпростори включення і гіперпростори включення зі скінченними носіями.

Кажемо, що гіперпростір включення $\mathcal{A} \in G(X)$ має *скінченний носій в* X, якщо $\mathcal{A} = \overline{\uparrow\mathcal{F}}$ для деякої скінченної сім'ї $\mathcal{F}$ скінченних підмножин простору X. Через $G^\bullet(X)$ позначимо підпростір простору $G(X)$, який містить усі гіперпростори включення зі скінченними носіями в X.

Твердження 3.5.1. *Для дискретного простору X простір $G^\bullet(X)$ також є дискретним.*

Доведення. Нехай $\mathcal{F}$ – гіперпростір включення з мінімальною скінченною базою $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ скінченних множин. Тоді відкрита множина

$$O(\mathcal{F}) = \bigcap_{i=1}^{n} \big(F_i^+ \cap \bigcap_{a \in F_i} ((X \setminus F_i) \cup \{a\})^-\big)$$

містить єдину точку $\mathcal{F}$. □

Твердження 3.5.2. *Для T_1-простору X множина $G^\bullet(X)$ є всюди щільною в $G(X)$.*

Доведення. Зафіксуємо гіперпростір включення $\mathcal{A} \in G(X)$ і деякий його окіл $O(\mathcal{A})$ в $G(X)$. Без втрати загальності, можемо вважати, що окіл $O(\mathcal{A})$ є базовим:

$$O(\mathcal{A}) = U_1^+ \cap \cdots \cap U_n^+ \cap V_1^- \cap \cdots \cap V_m^-$$

для деяких відкритих множин $U_1, \ldots, U_n$ і $V_1, \ldots, V_m$ в X. Для кожного $i \le n$ оберемо таку замкнену множину $A_i \in \mathcal{A}$, що $A_i \subset U_i$. Оскільки A_i перетинає кожну множину V_j, $j \le m$, то ми можемо вибрати скінченну підмножину $F_i \subset A_i$, що перетинає всі множини V_j, $j \le m$. Використовуючи T_1-аксіому простору X, легко перевірити, що сім'я $\mathcal{F} = \{F \underset{cl}{\subset} X : \exists i \le n \ \ F_i \subset F\}$ є гіперпростором включення зі скінченним носієм і $\mathcal{F}$ належить відкритому околу $O(\mathcal{A})$. □

Далі ми розглянемо так звані вільні гіперпростори включення. Гіперпростір включення $\mathcal{F} \in G(X)$ на некомпактному просторі X називається *вільним*, якщо для кожної компактної підмножини $K \subset X$ і кожного елемента $F \in \mathcal{F}$ знайдеться інший елемент $E \in \mathcal{F}$, такий, що $E \subset F \setminus K$. Через $G^\circ(X)$ позначимо підпростір простору $G(X)$, що складається з вільних гіперпросторів включення. Легко бачити, що $G^\bullet(X) \cap G^\circ(X) = \emptyset$ для кожного T_1-простору X.

В найпростішому випадку зліченного дискретного простору $X = \mathbb{N}$ вільні гіперпростори включення (які називаються напівфільтрами) на $\mathbb{N}$ були введені та детально вивчені в [33].

Твердження 3.5.3. *Для локально компактного нормального простору X множина $G^\circ(X)$ вільних гіперпросторів включення є замкненою і ніде не щільною в $G(X)$.*

Доведення. Зафіксуємо довільний гіперпростір включення $\mathcal{F} \in G(X) \setminus G^\circ(X)$ і оберемо таку замкнену множину $F \in \mathcal{F}$ і компактну $K \subset X$, що $F' \cap K \neq \emptyset$ для кожної множини $F' \in \mathcal{F}$ з $F' \subset F$. Оскільки X є локально компактним, то знайдеться відкритий окіл $V \subset X$ множини K, замикання $\overline{V}$ якого є компактним в X. Таким чином, $F \setminus V \notin \mathcal{F}$. За теоремою 3.1.2 існує окіл $O(F \setminus V)$ множини $F \setminus V$, що не містить жодної множини $F' \in \mathcal{F}$. Оскільки простір X є нормальним, то знайдуться такі відкриті множини $U, W \subset X$, що

$$F \subset U \subset \overline{U} \subset W \subset \overline{W} \subset O(F \setminus V) \cup V.$$

Розглянемо відкриту множину $\mathcal{U} = U^+ \cap (V \cup (X \setminus \overline{W}))^-$ в $G(X)$. Ми стверджуємо, що $\mathcal{F} \in \mathcal{U}$. Справді, $\mathcal{F} \in U^+$, бо $F \subset U$ і $F \in \mathcal{F}$. Далі, припустивши, що деяка множина $F' \in \mathcal{F}$ не перетинає множину $V \cup (X \setminus \overline{W})$ одержуємо, що $F' \subset \overline{W} \setminus V \subset O(F \setminus V)$, що є неможливим. Таким чином, $\mathcal{U}$ – відкритий окіл гіперпростору включення $\mathcal{F}$.

Далі, ми стверджуємо, що $\mathcal{U} \cap G^\circ(X) = \emptyset$. Припустивши протилежне, знайдемо вільний гіперпростір включення $\mathcal{E} \in \mathcal{U}$. Оскільки $\mathcal{E} \in U^+$, то знайдеться множина $E \in \mathcal{E}$ з $E \subset U$. Оскільки $\overline{V}$ є компактною і $\mathcal{E}$ – вільний, то існує така множина $E' \in \mathcal{E}$, що $E' \subset E \setminus \overline{V} \subset U \setminus V \subset \overline{W} \setminus V$. Отже, множина E' не перетинається з $V \cup (X \setminus \overline{W})$, що суперечить включенню $\mathcal{E} \in \mathcal{U}$.

Підмножина $G^\circ(X)$ є ніде не щільною в $G(X)$, бо вона замкнена і не перетинається з всюди щільною множиною $G^\bullet(X)$. □

3.6. Внутрішня алгебраїчна структура $G(X)$

У цьому підрозділі ми вивчатимемо алгебраїчну структуру просторів $G(X)$. Для кожного топологічного простору X простір $G(X)$ володіє двома бінарними операціями

$$\cup : G(X) \times G(X) \to G(X), \quad \cup : (\mathcal{F}, \mathcal{U}) \mapsto \mathcal{F} \cup \mathcal{U},$$

$$\cap : G(X) \times G(X) \to G(X), \quad \cap : (\mathcal{F}, \mathcal{U}) \mapsto \mathcal{F} \cap \mathcal{U},$$

і однією унарною операцією

$$\perp : G(X) \to G(X), \quad \perp : \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^{\perp} = \{E \underset{cl}{\subset} X : \forall F \in \mathcal{F} \;\; E \cap F \neq \emptyset\},$$

що називається *операцією трансверсалі.*

Переконаємося, що $\mathcal{F}^{\perp}$ дійсно є гіперпростором включення. Очевидно, що $\mathcal{F}^{\perp}$ – монотонна сім'я в $\exp(X)$. Для того, щоб показати замкненість $\mathcal{F}^{\perp}$ в $\exp(X)$ оберемо довільну замкнену підмножину $E \in \exp(X) \setminus \mathcal{F}^{\perp}$ і знайдемо $F \in \mathcal{F}$ з $E \cap F = \emptyset$. Тоді $\langle X \setminus F \rangle$ – відкритий окіл E в $\exp(X)$, що не перетинає множини $\mathcal{F}^{\perp}$. Схожими міркуваннями можна показати, що для довільної сім'ї $\mathcal{F} \subset \exp(X)$ її трансверсальна сім'я $\mathcal{F}^{\perp} = \{E \underset{cl}{\subset} X : \forall F \in \mathcal{F} \;\; E \cap F \neq \emptyset\}$ є гіперпростором включення. Більше того, друга трансверсаль $\mathcal{F}^{\perp\perp}$ збігається з гіперпростором включення $\overline{\uparrow\mathcal{F}} = \mathrm{cl}_{\exp(X)}\{E \underset{cl}{\subset} X : \exists F \in \mathcal{F} \;\; F \subset E\}$, породженим $\mathcal{F}$.

Твердження 3.6.1. *Для будь-якої непорожньої сім'ї $\mathcal{F} \subset \exp(X)$ виконується рівність $\mathcal{F}^{\perp\perp} = \overline{\uparrow\mathcal{F}}$.*

Доведення. Включення $\overline{\uparrow\mathcal{F}} \subset \mathcal{F}^{\perp\perp}$ випливає з означень $\mathcal{F}^{\perp}$, $\mathcal{F}^{\perp\perp}$ і замкненості $\mathcal{F}^{\perp\perp}$ в $\exp(X)$.

Припустивши, що $\overline{\uparrow\mathcal{F}} \neq \mathcal{F}^{\perp\perp}$, знайдемо множину $F \in (\mathcal{F}^{\perp})^{\perp} \setminus \overline{\uparrow\mathcal{F}}$. За теоремою 3.1.2 з $F \notin \overline{\uparrow\mathcal{F}}$ випливає існування околу U множини F, який не містить жодної множини $E \in \mathcal{F}$. Таким чином, $(X \setminus U) \in \mathcal{F}^{\perp}$. Оскільки $F \in (\mathcal{F}^{\perp})^{\perp}$, ми одержуємо $F \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$, що є протиріччям. $\square$

Деякі основні властивості трансверсалі встановлено в наступному твердженні.

Твердження 3.6.2. *Нехай $\mathcal{F}, \mathcal{U} \in G(X)$ – гіперпростори включення і $U \subset X$ – відкрита множина. Тоді*

1) $(\mathcal{F}^{\perp})^{\perp} = \mathcal{F}$;
2) $\mathcal{F} \in U^{+}$ *тоді і тільки тоді, коли* $\mathcal{F}^{\perp} \in U^{-}$;
3) $(\mathcal{F} \cup \mathcal{U})^{\perp} = \mathcal{F}^{\perp} \cap \mathcal{U}^{\perp}$;
4) $(\mathcal{F} \cap \mathcal{U})^{\perp} = \mathcal{F}^{\perp} \cup \mathcal{U}^{\perp}$.

Доведення. 1. Рівність $(\mathcal{F}^{\perp})^{\perp} = \mathcal{F}$ випливає з рівностей $\mathcal{F}^{\perp\perp} = \overline{\uparrow\mathcal{F}} = \mathcal{F}$.

2. Якщо $\mathcal{F} \in U^{+}$, то $F \subset U$ для деякого $F \in \mathcal{F}$ і, отже, кожна множина $E \in \mathcal{F}^{\perp}$ перетинає як F так і U, тобто $\mathcal{F}^{\perp} \in U^{-}$. Якщо $\mathcal{F} \notin U^{+}$, то кожен елемент $F \in \mathcal{F}$ перетинає множину $X \setminus U$, звідки $X \setminus U \in \mathcal{F}^{\perp}$ і, отже, $\mathcal{F}^{\perp} \notin U^{-}$.

3. Рівність $(\mathcal{F} \cup \mathcal{U})^{\perp} = \mathcal{F}^{\perp} \cap \mathcal{U}^{\perp}$ легко випливає з означення трансверсалі.

4. З попередніх пунктів випливає, що

$$\mathcal{F} \cap \mathcal{U} = \mathcal{F}^{\perp\perp} \cap \mathcal{U}^{\perp\perp} = (\mathcal{F}^{\perp} \cup \mathcal{U}^{\perp})^{\perp}.$$

Застосувавши до цієї рівності операцію трансверсалі, одержуємо

$$(\mathcal{F} \cap \mathcal{U})^{\perp} = (\mathcal{F}^{\perp} \cup \mathcal{U}^{\perp})^{\perp\perp} = \mathcal{F}^{\perp} \cup \mathcal{U}^{\perp}.$$

□

Застосуємо це твердження до доведення наступної теореми.

Теорема 3.6.3. *Операції $\cup, \cap$ і $\perp$ на $G(X)$ є неперервними.*

Доведення. 1. Неперервність трансверсалі випливає з твердження 3.6.2(2).

2. Щоб довести, що операція $\cup : G(X) \times G(X) \to G(X)$ є неперервною, оберемо довільну відкриту множину $U \subset X$ і відмітимо, що

$$\{(\mathcal{F}, \mathcal{U}) \in G(X) \times G(X) : \mathcal{F} \cup \mathcal{U} \in U^{+}\} = U^{+} \times G(X) \cup G(X) \times U^{+} \quad \text{і}$$

$$\{(\mathcal{F}, \mathcal{U}) \in G(X) \times G(X) : \mathcal{F} \cup \mathcal{U} \in U^{-}\} = U^{-} \times U^{-}.$$

3. Неперервність операції $\cap$ виводиться з неперервності $\cup$ і $\perp$ з допомогою твердження 3.6.2(4). $\square$

З попереднього твердження випливає, що для кожного топологічного простору X простір $G(X)$ володіє структурою симетричної ґратки.

Означення 3.6.4. *Симетрична ґратка* – це повна дистрибутивна ґратка $(L, \vee, \wedge)$, наділена додатковою унарною операцією $\perp\colon L \to L$, $\perp\colon x \mapsto x^{\perp}$, що є інволютивним антиізоморфізмом в тому розумінні, що

- $x^{\perp\perp} = x$ для будь-якого $x \in L$;
- $(x \vee y)^{\perp} = x^{\perp} \wedge y^{\perp}$;
- $(x \wedge y)^{\perp} = x^{\perp} \vee y^{\perp}$;

Поняття симетричної ґратки було введено в [33, § 4.2].

Для дискретного простору X множина $G(X)$ всіх гіперпросторів включення на X є підмножиною $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ (яка є повною дистрибутивною ґраткою) і замкнена відносно операцій об'єднання і перетину (довільних сімей гіперпросторів включення).

Оскільки кожен гіперпростір включення є об'єднанням фільтрів і кожен фільтр є перетином ультрафільтрів, то ми одержуємо наступне твердження, яке показує що ґратка $G(X)$ є досить природнім об'єктом.

Твердження 3.6.5. *Для дискретного простору X ґратка $G(X)$ збігається з найменшою повною підґраткою ґратки $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$, яка містить всі ультрафільтри.*

3.7. Характеризація гіперпросторів включення зі скінченними носіями

В цьому підрозділі ми дамо дуальну характеризацію гіперпросторів включення зі скінченними носіями. Ця характеризація суттєво використовуватиметься в теоремі 4.6.1 для опису топологічного центру напівгрупи $G(X)$ над дискретною напівгрупою X.

Теорема 3.7.1. *Гіперпростір включення $\mathcal{F}$ на T_1-просторі X має скінченний носій тоді і тільки тоді, коли гіперпростори включення $\mathcal{F}$ і $\mathcal{F}^\perp$ мають бази, що складаються зі скінченних множин.*

Доведення. Необхідність легко випливає з означення гіперпростору включення зі скінченним носієм. Щоб довести достатність, припустимо, що $\mathcal{F}$ і $\mathcal{F}^\perp$ мають бази зі скінченних множин. Кажемо, що множина $F \subset X$ є $\mathcal{F}$-*мінімальною* якщо $F \in \mathcal{F}$, але жодна власна підмножина $E \subset F$ не належить $\mathcal{F}$. Оскільки $\mathcal{F}$ має базу зі скінченних множин, то сім'я $\mathcal{M}$ $\mathcal{F}$-мінімальних множин містить тільки скінченні множини і є базою для $\mathcal{F}$. Щоб показати, що $\mathcal{F}$ має скінченний носій, досить перевірити скінченність сім'ї $\mathcal{M}$.

Припустимо супротивне, тобто, що $\mathcal{M}$ – нескінченна. Якщо $\mathcal{M}$ є незліченною, то згідно Δ-леми [56], існує незліченна підсім'я $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ і така множина A_0, що $A \cap A' = A_0$ для будь-яких різних елементів $A, A' \in \mathcal{A}$. З $\mathcal{F}$-мінімальності кожної множини $A \in \mathcal{A}$ випливає, що $A_0 \notin \mathcal{F}$ і, отже, $X \setminus A_0 \in \mathcal{F}^\perp$. Оскільки $\mathcal{F}^\perp$ має базу, що складається зі скінченних множин, то знайдеться скінченна множина $E \in \mathcal{F}^\perp$ з $E \subset X \setminus A_0$. Взявши до уваги, що сім'я $\{A \setminus A_0 : A \in \mathcal{A}\}$ є диз'юнктною і кожна множина $A \in \mathcal{A}$ перетинає скінченну множину $E = E \setminus A_0$, ми одержуємо абсурдний висновок про те, що сім'я $\mathcal{A}$ – скінченна.

Таким чином, залишається розглянути випадок зліченної множини $\mathcal{M}$. В цьому випадку множина $M = \bigcup \mathcal{M}$ є зліченною і цілком впорядкованою порядком $\le$ таким чином, що для кожного $x \in \bigcup \mathcal{M}$ початковий інтервал ${\downarrow}x = \{y \in M : y \le x\}$ є скінченним. Розглянемо сім'ю скінченних множин

$$
{\downarrow}\mathcal{M} = \{B \cap {\downarrow}x : B \in \mathcal{M},\ x \in M\}.
$$

Наділена відношенням часткового порядку за включенням, ця сім'я утворює дерево T з скінченними гілками, максимальні елементи яких є множинами з сім'ї $\mathcal{M}$.

Покажемо, що кожен елемент $A \in {\downarrow}\mathcal{M}$ цього дерева має не більш ніж скінченну кількість безпосередніх наступників в дереві T. Якщо A є максимальним елементом дерева T, то A не має наступників. Отже, ми вважаємо, що A не є максимальним елементом і тому A є власною підмножиною деякого $B \in \mathcal{M}$. З $\mathcal{F}$-мінімальності B випливає, що $A \notin \mathcal{F}$ і, отже, $X \setminus A \in \mathcal{F}^{\perp}$. Оскільки $\mathcal{F}^{\perp}$ має базу зі скінченних множин, то існує скінченна множина $E \in \mathcal{F}^{\perp}$ з $E \subset X \setminus A$ і максимальний елемент $e = \max E$. Тепер розглянемо довільний безпосередній наступник $S \in {\downarrow}\mathcal{M}$ множини A в T. Знайдемо такі множину $B \in \mathcal{M}$ і точку $b \in B$, що $S = B \cap {\downarrow}b$. Оскільки множина S є безпосереднім наступником множини A, то множина S дорівнює $A \cup \{b\}$. Взявши до уваги, що

$$(B \setminus A) \cap E = B \cap (E \setminus A) = B \cap E \neq \emptyset,$$

одержуємо, що $b = \min B \setminus A \leq \max E = e$ і, отже, $S = A \cup \{b\} \subset {\downarrow}e$. Оскільки початковий інтервал ${\downarrow}e$ є скінченним, то сім'я всіх безпосередніх наступників A в дереві T є скінченною. Таким чином, T – дерево зі скінченними гілками і скінченними безпосередніми наступниками кожного свого елемента. Згідно леми Кьоніґа [56], дерево $T = {\downarrow}\mathcal{M}$ є скінченним і, отже, множина $\mathcal{M}$ максимальних елементів дерева T теж скінченна. $\square$

3.8. Деякі важливі підпростори простору $G(X)$

Простір $G(X)$ гіперпросторів включення містить багато цікавих підпросторів. В підрозділі 3.4 ми вже розглядали деякі підпростори, зокрема, розширення Волмена ωX простору X. В цьому підрозділі ми розглянемо деякі інші підпростори простору $G(X)$.

Нехай X – топологічний простір і $k \geq 2$ – натуральне число. Гіперпростір включення $\mathcal{A} \in G(X)$ називається

- *k-зчепленим*, якщо $\cap\mathcal{F} \neq \emptyset$ для довільної підсім'ї $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ потужності $|\mathcal{F}| \leq k$;
- *центрованим*, якщо $\cap\mathcal{F} \neq \emptyset$ для довільної скінченної підсім'ї $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$;

- *фільтром*, якщо $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$ для всіх множин $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$.

Через $N_k(X)$, $N_{<\omega}(X)$ і $\mathrm{Fil}(X)$ позначимо підмножини простору $G(X)$, які складаються відповідно з k-зчеплених, центрованих гіперпросторів включення і фільтрів. Очевидно, що

$$\mathrm{Fil}(X) \subset N_{<\omega}(X) \subset N_k(X) \subset N_2(X) \subset G(X).$$

Зараз ми доведемо, що для нормального простору X всі ці множини є замкненими в $G(X)$.

Твердження 3.8.1. *Для нормального простору X множина фільтрів $\mathrm{Fil}(X)$ є замкненою в $G(X)$.*

Доведення. Розглянемо довільний гіперпростір включення $\mathcal{A} \in G(X) \setminus \mathrm{Fil}(X)$. Оскільки $\mathcal{A} \notin \mathrm{Fil}(X)$, то знайдуться дві множини $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ з $A_1 \cap A_2 \notin \mathcal{A}$. Оскільки $\mathcal{A}$ є монотонною і замкненою в $\exp(X)$, то знайдеться такий окіл $U \subset X$ множини $A_1 \cap A_2$, що $\mathcal{A} \notin U^+$. Використовуючи нормальність простору X знайдемо такий окіл W множини $A_1 \cap A_2$, що $\overline{W} \subset U$ і одержуємо, що $\mathcal{A} \in G(X) \setminus U^+ \subset (X \setminus \overline{W})^-$. Використовуючи нормальність X ще раз, знайдемо дві відкриті множини $U_1 \ni A_1$ і $U_2 \supset A_2$, такі, що $U_1 \cap U_2 \subset W$.

Ми стверджуємо, що $U_1^+ \cap U_2^+ \cap (X \setminus \overline{W})^-$ є околом множини $\mathcal{A}$ в $G(X)$, що не перетинає множину $\mathrm{Fil}(X)$. Справді, припустивши, що $U_1^+ \cap U_2^+ \cap (X \setminus \overline{W})^-$ містить деякий фільтр $\mathcal{F}$, знайдемо дві множини $F_1, F_2 \in \mathrm{Fil}(X)$ з $F_1 \subset U_1$, $F_2 \subset U_2$. Отже, $\mathcal{F} \ni F_1 \cap F_2 \subset U_1 \cap U_2 \subset W$. З іншого боку, з $\mathcal{F} \subset (X \setminus \overline{W})^-$ випливає, що $F_1 \cap F_2 \not\subset \overline{W}$ і ми приходимо до протиріччя. $\square$

Твердження 3.8.2. *Для нормального простору X простори $N_k(X)$ замкнені в $G(X)$ для всіх $k \geq 2$.*

Доведення. Спершу доведемо за індукцією, що для множин $F_1, \dots, F_k$ з порожнім перетином $F_1 \cap \dots \cap F_k$ існують такі відкриті множини $V_1 \supset F_1, \dots, V_k \supset F_k$, що $V_1 \cap \dots \cap V_k$ теж є порожнім. Для $n = 2$ це випливає з означення нормального простору. Припустивши, що для $n = k$ твердження виконано, ми покажемо, що воно виконується і для $n = k+1$. Нехай $F_1 \cap \dots \cap F_{k+1} = \emptyset$. Для множин $F_1 \cap \ldots \cap F_k$ і F_{k+1} виберемо такі околи U_0 і U_{k+1}, що $U_0 \supset F_1 \cap \ldots \cap F_k$, $U_{k+1} \supset F_{k+1}$ і $U_0 \cap U_{k+1} = \emptyset$. Через G_i позначимо множину $F_i \setminus U_0,\ i = 1, \ldots k$. Ми маємо, що $G_1 \cap \ldots \cap G_k = \emptyset$ і, отже, можемо за індуктивним припущенням вибрати такі околи $V_i \supset G_i$, що $V_1 \cap \cdots \cap V_k = \emptyset$. Покладемо $U_i = V_i \cup U_0$. Одержуємо, що $U_i \supset F_i$ і $U_1 \cap \ldots \cap U_k \cap U_{k+1} = ((V_1 \cup U_0) \cap \ldots \cap (V_k \cup U_0)) \cap U_{k+1} = ((V_1 \cap \ldots \cap V_k) \cup U_0) \cap U_{k+1} = U_0 \cap U_{k+1} = \emptyset$.

Тепер доведемо замкненість $N_k(X)$ в $G(X)$. Нехай $\mathcal{F} \in cl_{GX} N_k(X)$. Припустимо, що $\mathcal{F}$ не є k-зчепленою. Отже, знайдуться множини $F_1, \ldots, F_k \in \mathcal{F}$ з порожнім перетином. Виберемо такі околи $U_1 \supset F_1, \ldots, U_k \supset F_k$, що $U_1 \cap \ldots \cap U_k = \emptyset$, тоді $\mathcal{F} \in U_1^+ \cap \ldots \cap U_k^+$. Таким чином існує $\mathcal{A} \in N_k X$, така, що $\mathcal{A} \in U_1^+ \cap \ldots \cap U_k^+$. Оберемо множини $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$ з $A_i \subset U_i$ для всіх $i \leq k$. Тоді $A_1 \cap \ldots \cap A_k \subset U_1 \cap \ldots \cap U_k = \emptyset$, що суперечить k-зчепленості множини $\mathcal{A}$. □

Оскільки $N_{<\omega}(X) = \bigcap_{k \geq 2} N_k(X)$, то з попереднього твердження випливає

Наслідок 3.8.3. *Для нормального простору X множина $N_{<\omega}(X)$ центрованих гіперпросторів включення є замкненою в $G(X)$.*

Гіперпростір включення $\mathcal{A} \in G(X)$ називається

- *максимальним k-зчепленим*, якщо $\mathcal{A}$ є k-зчепленим і $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ для кожного такого k-зчепленого гіперпростору включення $\mathcal{B} \in N_k(X)$, що $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$;
- *ультрафільтром*, якщо $\mathcal{A}$ – фільтр і $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ для кожного фільтра $\mathcal{B} \in \mathrm{Fil}(X)$ з $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.

Ультрафільтр, який складається з усіх надмножин множини $\{x\} \subset X$ називається *головним ультрафільтром*, породженим точкою x.

Через $\omega(X)$ і $\lambda_k(X)$ позначимо відповідно підмножини простору $G(X)$, які складаються з ультрафільтрів і максимальних k-зчеплених гіперпросторів включення. Згідно з твердженням 3.4.5, для T_1-простору X простір $\omega(X)$ збігається з розширенням Волмена простору X і для нормального X збігається з компактифікацією Стоуна-Чеха $\beta(X)$ простору X. Простір $\lambda_2(X)$ звичайно позначається через $\lambda(X)$ і називається *суперрозширенням* простору X, а його елементи – *максимальними зчепленими системами на* X див. [67].

Твердження 3.8.4. *Для нормального простору X множини $\omega(X)$ і $\lambda(X)$ замкнені в $G(X)$.*

Доведення. Згідно з твердженням 3.2.2 простір $G(X)$ є гаусдорфовим. Відмітимо, що гіперпростір включення $\mathcal{A} \in G(X)$ є максимальною зчепленою системою, тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{\perp}$. Таким чином, $\lambda(X)$ є замкненою як множина нерухомих точок трансверсалі $\perp\colon G(X) \to G(X)$ на гаусдорфовому просторі $G(X)$. Множина $\omega(X)$ є замкненою як перетин $\omega(X) = \mathrm{Fil}(X) \cap \lambda(X)$ двох замкнених множин. □

Добре відомо (і легко перевірити), що кожен ультрафільтр є максимальною зчепленою системою. Для k-зчеплених гіперпросторів включення з $k > 2$ ситуація є дещо іншою:

Твердження 3.8.5. *Якщо максимальний k-зчеплений гіперпростір включення $\mathcal{F}$ є $(k+1)$-зчепленим, то $\mathcal{F}$ – ультрафільтр. Таким чином, $\lambda_k(X) \cap N_{k+1}(X) \subset \omega(X)$.*

Доведення. Нехай $A, B \in \mathcal{F}$. Досить довести, що перетин $A \cap B$ належить до $\mathcal{F}$. З $(k+1)$-зчепленості множини $\mathcal{F}$ випливає, що для будь-яких $F_1, \ldots, F_{k-1} \in \mathcal{F}$ множина

$$(A \cap B) \cap F_1 \cap \ldots \cap F_{k-1} = A \cap B \cap F_1 \cap \ldots \cap F_{k-1}$$

є непорожньою. Оскільки $\mathcal{F}$ є максимальною k-зчепленою системою, то $A \cap B \in \mathcal{F}$. □

Таким чином, ми одержали наступну діаграму, яка описує взаємозв'язки між підпросторами $N_k(X)$, $N_{<\omega}(X)$, $\mathrm{Fil}(X)$, $\lambda_k(X)$ і $\omega(X)$ простору $G(X)$ (стрілка $A \to B$ означає, що A є підмножиною B).

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Fil}(X) \arrow[r] & N_{<\omega}(X) \arrow[r] & N_{k+1}(X) \arrow[r] & N_k(X) \arrow[r] & N_2(X) \arrow[r] & G(X) \\
& & N_{k+1}(X)\cap\lambda_k(X) \arrow[u] \arrow[r] \arrow[dll] & \lambda_k(X) \arrow[u] & & \\
\omega(X) \arrow[uu] \arrow[rrrr] & & & & \lambda(X) \arrow[uu] &
\end{tikzcd}$$

Для довільного топологічного простору X розглянемо перетини

$$\begin{aligned}
\mathrm{Fil}^\bullet(X) =&\mathrm{Fil}(X)\cap G^\bullet(X), \quad N^\bullet_{<\omega}(X) = N_{<\omega}(X)\cap G^\bullet(X),\\
N^\bullet_k(X) =&N_k(X)\cap G^\bullet(X), \quad \lambda^\bullet(X) = \lambda X\cap G^\bullet(X)
\end{aligned}$$

замкнених підмножин простору $G(X)$ з всюди щільним підпростором $G^\bullet(X)$ гіперпросторів включення зі скінченними носіями.

Наступне твердження доводиться аналогічно до доведення твердження 3.5.2.

Твердження 3.8.6. *Для довільного T_1-простору X і кожного $k\ge 2$ підпростір $N^\bullet_k(X)$ (відповідно $N^\bullet_{<\omega}(X)$, $\mathrm{Fil}^\bullet(X)$) є всюди щільним в $N_k(X)$ (відповідно $N_{<\omega}(X)$, $\mathrm{Fil}(X)$).*

Для некомпактного простору X ми можемо також розглянути перетини

$$\begin{aligned}
\mathrm{Fil}^\circ(X) =&\mathrm{Fil}(X)\cap G^\circ(X), \quad N^\circ_{<\omega}(X) = N_{<\omega}(X)\cap G^\circ(X),\\
N^\circ_k(X) =&N_k(X)\cap G^\circ(X), \quad \lambda^\circ(X) = \lambda X\cap G^\circ(X), \text{ і}\\
\omega^\circ(X) =&\omega(X)\cap G^\circ(X) = \omega(X)\setminus X
\end{aligned}$$

замкнених підмножин простору $G(X)$ з підпростором $G^\circ(X)$ вільних гіперпросторів включення. Елементи цих множин називатимемо вільними фільтрами, вільними центрованими гіперпросторами включення, вільними k-зчепленими гіперпросторами включення, і т.д.

Співставляючи твердження 3.8.1–3.8.4 з твердженням 3.5.3, одержуємо

Наслідок 3.8.7. *Для локально компактного нормального простору X підмножини $\mathrm{Fil}^\circ(X)$, $N^\circ_{<\omega}(X)$, $N^\circ_k(X)$, $\lambda^\circ(X)$, $\omega^\circ(X)$ є замкненими в $G(X)$.*

Насправді, простори $\lambda(X)$ і $\lambda^\circ(X)$ є навіть суперкомпактними, див. [67]. Для повноти викладок ми дамо коротке доведення цієї важливої властивості просторів $\lambda(X)$ і $\lambda^\circ(X)$.

Твердження 3.8.8. *Для довільного топологічного простору X суперрозширення $\lambda(X)$ є суперкомпактним простором.*

Доведення. Взявши до уваги пункт 2 твердження 3.6.2 і рівність $\mathcal{F} = \mathcal{F}^\perp$, виконану для довільних $\mathcal{F} \in \lambda(X)$, одержуємо, що $\lambda(X) \cap U^+ = \lambda(X) \cap U^-$ для кожної відкритої множини $U \subset X$. Отже, достатньо перевірити, що кожне відкрите покриття $\{U_\alpha^- : \alpha \in A\}$ простору $\lambda(X)$ містить двоелементне підпокриття. Ми стверджуємо, що $X = U_\alpha \cup U_\beta$ для деяких індексів $\alpha, \beta \in A$. Припустивши протилежне, одержуємо, що сім'я $\{X \setminus U_\alpha : \alpha \in A\}$ є зчепленою і, отже, може бути продовжена до максимальної зчепленої системи $\mathcal{L}$. Очевидно, що $\mathcal{L} \notin \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha^-$ – протиріччя з тим фактом, що $\{U_\alpha^- : \alpha \in A\}$ є покриттям $\lambda(X)$. Отже, $X = U_\alpha \cup U_\beta$ для деяких індексів $\alpha, \beta \in A$. З останньої рівності випливає, що $\lambda(X) \subset U_\alpha^- \cup U_\beta^-$. □

Твердження 3.8.9. *Для довільного локально компактного простору X простір $\lambda^\circ(X)$ є суперкомпактним.*

Доведення. Потрібно довести, що кожне покриття $\{U_\alpha^- : \alpha \in \Omega\}$ простору $\lambda^\circ(X)$ елементами передбази містить двоелементне підпокриття. Нехай $\mathcal{K}(X)$ – сім'я відкритих підмножин, що мають компактні замикання в X.

Ми стверджуємо, що $X = U_\alpha \cup U_\beta \cup K$ для деяких індексів $\alpha, \beta \in \Omega$ і деякої множини $K \in \mathcal{K}(X)$. Припустивши протилежне, одержуємо, що сім'я $\{X \setminus (U_\alpha \cup K) : \alpha \in \Omega,\ K \in \mathcal{K}(X)\}$ є вільною і 2-зчепленою. Використовуючи лему Цорна продовжимо цю сім'ю до максимальної зчепленої вільної системи $\mathcal{L}$. Легко бачити, що $\mathcal{L}$ належить $\lambda^\circ(X)$ і, отже, $\mathcal{L} \in U_\alpha^-$ для деякого $\alpha \in \Omega$. З іншого боку, цього не може бути, оскільки $X \setminus U_\alpha \in \mathcal{L}$.

Це протиріччя доводить, що $X = U_\alpha \cup U_\beta \cup K$ для деяких $\alpha, \beta \in \Omega$ і $K \in \mathcal{K}(X)$. Ми стверджуємо, що $\lambda^\circ(X) \subset U_\alpha^- \cup U_\beta^-$. Припустивши протилежне, знайдемо вільну максимальну зчеплену систему $\mathcal{F} \notin U_\alpha^- \cup U_\beta^-$, що містить дві такі множини $A, B \in \mathcal{F}$, що $A \cap U_\alpha = \emptyset$ і $B \cap U_\beta = \emptyset$. Отже, $A \cap B \subset X \setminus (U_\alpha \cup U_\beta) \subset K$.

Оскільки гіперпростір включення $\mathcal{F}$ є вільним і K має компактне замикання в X, то існують такі множини $A', B' \in \mathcal{F}$, що $A' \subset A \setminus K$ і $B' \subset B \setminus K$. Ці множини мають порожній перетин:

$$A' \cap B' \subset (A \cap B) \setminus K = \emptyset,$$

що суперечить вибору $\mathcal{F}$ як зчепленого гіперпростору включення. $\square$

3.9. Відображення між просторами гіперпросторів включення

Добре відомо, що конструкція простору гіперпросторів включення є функторіальною в категорії компактів. В цьому підрозділі ми продовжимо цю конструкцію на категорію нормальних топологічних просторів і покажемо, що для нормального простору X простір $G(X)$ канонічно гомеоморфний $G(\beta X)$, де $\beta(X) = \omega(X)$ – компактифікація Стоуна-Чеха простору X.

Для довільного відображення $f : X \to Y$ між топологічними просторами розглянемо відображення $Gf : G(X) \to G(Y)$, яке кожному гіперпростору включення $\mathcal{F} \in G(X)$ співставляє гіперпростір включення

$$Gf(\mathcal{F}) = f(\mathcal{F})^{\perp\perp} = \mathrm{cl}_{\exp(Y)}(f(\mathcal{F})),$$

де

$$f(\mathcal{F}) = \{E \underset{cl}{\subset} Y : \exists F \in \mathcal{F} \text{ така, що } F \subset f^{-1}(E)\} \subset \exp(Y)$$

(рівність $f(\mathcal{F})^{\perp\perp} = \overline{f(\mathcal{F})}$ в означенні $Gf(\mathcal{F})$ випливає з твердження 3.6.1).

Визначене таким чином відображення $Gf : G(X) \to G(Y)$ – ґратковий гомоморфізм.

Твердження 3.9.1. *Нехай $f : X \to Y$ – відображення між топологічними просторами і $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in G(X)$ – гіперпростори включення. Тоді*

1) *$Gf(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = Gf(\mathcal{A}) \cup Gf(\mathcal{B})$;*

2) $Gf(\mathcal{A}\cap\mathcal{B}) = Gf(\mathcal{A})\cap Gf(\mathcal{B})$;

3) $Gf(\mathcal{A}^\perp) = Gf(\mathcal{A})^\perp$, *при умові, що* f *– неперервне і* Y *є* T_4*-простором.*

Доведення. 1. Перший пункт випливає з рівностей

$$Gf(\mathcal{A}\cup\mathcal{B}) = f(\mathcal{A}\cup\mathcal{B})^{\perp\perp} = \big(f(\mathcal{A})\cup f(\mathcal{B})\big)^{\perp\perp} =$$
$$= \big(f(\mathcal{A})^\perp\cap f(\mathcal{B})^\perp\big)^\perp = \big(f(\mathcal{A})^{\perp\perp}\cup f(\mathcal{B})^{\perp\perp}\big) = Gf(\mathcal{A})\cup Gf(\mathcal{B}).$$

2. Так само, другий пункт випливає з рівності $f(\mathcal{A}\cap\mathcal{B}) = f(\mathcal{A})\cap f(\mathcal{B})$, яка доводиться наступним чином. Розглянемо довільні замкнені підмножини $E\in f(\mathcal{A})\cap f(\mathcal{B})$ простору Y і знайдемо такі $A\in\mathcal{A}$ і $B\in\mathcal{B}$, що $A\subset f^{-1}(E)$ і $B\subset f^{-1}(E)$. Звідси $A\cup B\in\mathcal{A}\cap\mathcal{B}$ і $A\cup B\subset f^{-1}(E)$, і, отже, $E\in f(\mathcal{A}\cap\mathcal{B})$. Це доводить включення $f(\mathcal{A})\cap f(\mathcal{B})\subset f(\mathcal{A}\cap\mathcal{B})$. Протилежне включення є тривіальним.

3. Припустимо, що відображення f є неперервним і Y – T_4-простір. Нам потрібно перевірити рівність $Gf(\mathcal{A}^\perp) = Gf(\mathcal{A})^\perp$. Оскільки $Gf(\mathcal{A})^\perp = f(\mathcal{A})^{\perp\perp\perp} = f(\mathcal{A})^\perp$, то включення

$$\overline{f(\mathcal{A}^\perp)} = Gf(\mathcal{A}^\perp)\subset Gf(\mathcal{A})^\perp = f(\mathcal{A})^\perp$$

буде виконуватись як тільки ми доведемо, що $f(\mathcal{A}^\perp)\subset f(\mathcal{A})^\perp$. Розглянемо довільну множину $A\in f(\mathcal{A}^\perp)$ і знайдемо $B\in\mathcal{A}^\perp$ з $B\subset f^{-1}(A)$. Далі, для довільної множини $C\in f(\mathcal{A})$ знайдемо таку множину $D\in\mathcal{A}$, що $D\subset f^{-1}(C)$. Оскільки $B\in\mathcal{A}^\perp$, то ми одержуємо, що

$$\emptyset\neq B\cap D\subset f^{-1}(A)\cap f^{-1}(C) = f^{-1}(A\cap C)$$

і, отже, $A\cap C\neq\emptyset$. Ми довели, що множина A перетинається з кожною множиною $C\in f(\mathcal{A})$ і, таким чином, $A\in f(\mathcal{A})^\perp$, що доводить потрібне включення $f(\mathcal{A}^\perp)\subset f(\mathcal{A})^\perp$.

Щоб довести протилежне включення $f(\mathcal{A})^\perp\subset\overline{f(\mathcal{A}^\perp)}$ ми використовуватимемо неперервність f і T_4-властивість простору Y. Припустивши, що $f(\mathcal{A})^\perp\setminus\overline{f(\mathcal{A}^\perp)}$ містить деяку замкнену множину $F\subset Y$, знайдемо відкритий окіл $O(F)\subset$

Y множини F, що не містить жодної множини з гіперпростору включення $\overline{f(\mathcal{A}^\perp)}$. За T_4-аксіомою простору Y, замкнена множина $C = Y \setminus O(F)$ простору Y має окіл $O(C)$, замикання $E = \overline{O(C)}$ якого міститься в $Y \setminus F$. За неперервністю відображення f множина $f^{-1}(E)$ є замкненою в X. Ми стверджуємо, що ця множина належить $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{\perp\perp}$. Розглянемо довільну множину $A \in \mathcal{A}^\perp$ і зауважимо, що замикання $\overline{f(A)}$ її образу $f(A)$ в Y належить $f(\mathcal{A}^\perp)$. Вибір околу $O(F)$ гарантує нам, що $\overline{f(A)}$ перетинає $C = Y \setminus O(F)$ і, як наслідок, $f(A)$ перетинає $O(C)$ і $E = \overline{O(C)}$. Отже, A перетинає $f^{-1}(E)$, звідки випливає, що $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}^{\perp\perp} = \mathcal{A}$ і, отже, $E \in f(\mathcal{A})$, що є неможливим, оскільки E не перетинає множину $F \in f(\mathcal{A})^\perp$. □

Наступний приклад показує, що T_4-властивість простору Y в третьому пункті твердження 3.9.1 є суттєвою.

Приклад 3.9.2. Розглянемо включення $f : X \to Y$ одноточкової множини $X = \{a\}$ в зв'язну трикрапку $Y = (\{a, b, c\}, \tau)$, наділену топологією $\tau = \big\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\big\}$. Включення f індукує ґратковий гомоморфізм $Gf : G(X) \to G(Y)$. Ми стверджуємо, що $Gf(\mathcal{F}^\perp) \neq Gf(\mathcal{F})^\perp$, де $\mathcal{F} = \big\{\{a\}\big\}$ – єдиний елемент простору $G(X)$. Дійсно,

$$Gf(\mathcal{F}^\perp) = Gf(\mathcal{F}) = \overline{f(\mathcal{F})} = \big\{\{a, b, c\}, \{b, c\}\big\},$$

тоді як

$$Gf(\mathcal{F})^\perp = \big\{\{a, b, c\}, \{b, c\}\big\}^\perp = \big\{\{a, b, c\}, \{b, c\}, \{b\}, \{c\}\big\} \neq Gf(\mathcal{F}^\perp).$$

Неперервність індукованого відображення Gf є дуже делікатним питанням.

Твердження 3.9.3. *Відображення $f : X \to Y$ між T_1-просторами є неперервним, якщо відображення $Gf : G(X) \to G(Y)$ – неперервне.*

Доведення. Використовуючи вкладення $i_X : X \to G(X)$, $i_X : x \mapsto {\uparrow}x$, ототожнюємо X з підпростором простору $G(X)$. Аналогічно ототожнюємо Y з підпростором $i_Y(Y)$ простору $G(Y)$. Для кожного $x \in X$ розглянемо ультрафільтри $\uparrow x = \{F \in \exp(X) : x \in F\}$ і $\uparrow f(x) = \{F \in \exp(Y) : f(x) \in F\}$. З означення відображення Gf випливає, що $Gf(\uparrow x) = \uparrow f(x)$. Це можна записати таким чином $i_Y \circ f = Gf \circ i_X$. Оскільки відображення i_X, i_Y є вкладеннями, то з неперервності Gf випливає неперервність відображення f. $\square$

Для нормального простору Y попереднє твердження можна обернути.

Твердження 3.9.4. *Якщо $f : X \to Y$ є неперервним відображенням з топологічного простору X в T_4-простір Y, то відображення $Gf : G(X) \to G(Y)$ є неперервним.*

Доведення. Досить перевірити, що для кожної відкритої множини $U \subset Y$ прообрази $Gf^{-1}(U^+)$ і $Gf^{-1}(U^-)$ є відкритими в $G(X)$. Зафіксуємо довільний гіперпростір включення $\mathcal{F} \in Gf^{-1}(U^+)$ і нехай $\mathcal{E} = Gf(\mathcal{F})$. Оскільки $\mathcal{E} \in U^+$, то знайдеться така множина $E \in \mathcal{E}$, що $f(F) \subset E \subset U$ для деякого $F \in \mathcal{F}$. Оскільки Y є T_4-простором, то знайдеться така відкрита множина $W \subset Y$, що $E \subset W \subset \overline{W} \subset U$. Таким чином $f^{-1}(W)^+$ є таким околом $\mathcal{F}$ в $G(X)$, що $Gf(\mathcal{F}') \in U^+$ для кожного $\mathcal{F}' \in f^{-1}(W)^+$. Це доводить, що $Gf^{-1}(U^+)$ є околом в $G(X)$.

Щоб показати, що $Gf^{-1}(U^-)$ є відкритою в $G(X)$, зафіксуємо довільний гіперпростір включення $\mathcal{F} \in Gf^{-1}(U^-)$ і нехай $\mathcal{E} = Gf(\mathcal{F})$. Оскільки $X \setminus U \notin \mathcal{E}$, то існує окіл $W \subset Y$ множини $X \setminus U$, який не містить жодної замкненої множини $E \in \mathcal{E}$, тобто $E \cap (Y \setminus W) \neq \emptyset$ для всіх $E \in \mathcal{E}$. Оскільки Y є T_4-простором, то існує така відкрита множина $V \subset Y$, що $Y \setminus W \subset V \subset \overline{V} \subset U$. Таким чином, $\mathcal{E} \in V^-$. Легко перевірити, що $\mathcal{F} \in f^{-1}(V)^-$ і $f^{-1}(V)^-$ є відкритим околом $\mathcal{F}$, який міститься в $Gf^{-1}(U^-)$, що доводить відкритість $Gf^{-1}(U^-)$ в $G(X)$. $\square$

Наступний простий приклад показує, що, в загальному випадку, неперервність Gf не випливає з неперервності f.

Приклад 3.9.5. Розглянемо включення $f : X \to Y$ зв'язної двокрапки $X = \{a, b\}$ з топологією $\tau_X = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$ в зв'язну трикрапку $Y = \{a, b, c\}$ з топологією

$$\tau_Y = \big\{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\big\}.$$

Ми стверджуємо, що вкладення f породжує розривне відображення $Gf : G(X) \to G(Y)$.

Зауважимо, що простір $G(X)$ містить два гіперпростори включення: $\mathcal{A} = \big\{\{a,b\}\big\}$ і $\mathcal{B} = \big\{\{b\}, \{a,b\}\big\}$. Розглянувши їхні образи в $G(Y)$, ми одержуємо:

$$Gf(\mathcal{A}) = \big\{\{b,c\}, \{a,b,c\}\big\} \text{ і } Gf(\mathcal{B}) = \big\{\{b\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\big\}.$$

Відмітимо, що відкрита множина $\{a,b\}^+$ в $G(Y)$ містить гіперпростір включення $Gf(\mathcal{B})$, але не містить $Gf(\mathcal{A})$. Припустивши неперервність відображення Gf, ми б одержали, що $U = Gf^{-1}(\{a,b\}^+) = \{\mathcal{B}\}$ є відкритою множиною в $G(X)$. Але це неможливо, оскільки єдиною нетривіальною відкритою множиною в $G(X)$ є $\{a\}^- = \{\mathcal{A}\}$.

Далі, ми відповімо на природне запитання: чи індуковані відображення між просторами гіперпросторів включення зберігають композиції відображень.

Твердження 3.9.6. *Нехай $f : X \to Y$ і $g : Y \to Z$ – два неперервні відображення між топологічними просторами. Для довільного гіперпростору включення $\mathcal{F} \in G(X)$ маємо*

1) $G(g \circ f)(\mathcal{F}) \subset (Gg \circ Gf)(\mathcal{F}))$;
2) $G(g \circ f)(\mathcal{F}) = (Gg \circ Gf)(\mathcal{F})$, *за умови, що Z є T_4-простором.*

Доведення. 1. Перший пункт випливатиме з замкненості $(Gg \circ Gf)(\mathcal{F}) = Gg(Gf(\mathcal{F}))$ як тільки ми перевіримо, що $g \circ f(\mathcal{F}) \subset Gg(Gf(\mathcal{F}))$. Розглянемо довільну замкнену множину $A \in g \circ f(\mathcal{F})$. Тоді $g^{-1}(A) \in f(\mathcal{F}) \subset \overline{f(\mathcal{F})} = Gf(\mathcal{F})$ і, отже, $A \in g(Gf(\mathcal{F})) \subset \overline{g(Gf(\mathcal{F}))} = Gg(Gf(\mathcal{F}))$.

2. Припустивши, що Z є T_4-простором, доведемо, що $(Gg \circ Gf)(\mathcal{F}) \subset G(g \circ f)(\mathcal{F})$. Оскільки $(Gg \circ Gf)(\mathcal{F}) = \overline{g(Gf(\mathcal{F}))}$, то достатньо перевірити, що $g(Gf(\mathcal{F})) \subset G(g \circ f)(\mathcal{F})$. Розглянемо довільну замкнену множину $A \in g(Gf(\mathcal{F}))$. Припустивши, що $A \notin G(g \circ f)(\mathcal{F}) = \overline{g \circ f(\mathcal{F})}$ знайдемо відкритий окіл $O(A) \subset Z$

множини A, який не містить жодної множини з сім'ї $g \circ f(\mathcal{F})$. Оскільки Z є T_4-простором, то відкритий окіл $O(A)$ містить замикання іншого відкритого околу $O_1(A)$ множини A в Z. Для кожного $F \in \mathcal{F}$ замикання $\overline{g(f(F))}$ належить до $g \circ f(\mathcal{F})$ і перетинає замнену множину $Z \setminus O(A)$ згідно з вибором околу $O(A)$. Далі, $g(f(F))$ перетинає замкнений окіл $B = Z \setminus O_1(A)$ множини $Z \setminus O(A)$. Таким чином, $g^{-1}(B)$ перетинає кожну множину $f(F)$, $F \in \mathcal{F}$. Звідси випливає, що $g^{-1}(B) \in f(\mathcal{F})^{\perp}$. Оскільки $g^{-1}(A) \in Gf(\mathcal{F}) = f(\mathcal{F})^{\perp\perp}$, ми одержуємо, що $g^{-1}(A)$ перетинає $g^{-1}(B)$, що є суперечністю (тому, що $A \cap B = \emptyset$). $\square$

Наступний приклад показує, що останній пункт твердження 3.9.6 не виконується без T_4-припущення.

Приклад 3.9.7. Нехай $X = \{a\}$ – одноточкова множина і $Y = Z = \{a, b, c\}$ – зв'язна трикрапка, наділена топологією

$$\tau = \big\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\big\}.$$

Нехай $f : X \to Y$, $f : a \mapsto a$, – включення і $g : Y \to Z$ – відображення, означене формулою $g(a) = a$ і $g(b) = g(c) = b$. Нехай $\mathcal{F} = \big\{\{a\}\big\}$ є єдиним гіперпростором включення в $G(X)$. Легко бачити, що

$$G(g \circ f)(\mathcal{F}) = \big\{\{b, c\}, \{a, b, c\}\big\},$$

$$Gf(\mathcal{F}) = \big\{\{b, c\}, \{a, b, c\}\big\},$$

$$Gg(Gf(\mathcal{F})) = \big\{\{b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\big\}$$

і, отже, $G(g \circ f)(\mathcal{F}) \neq Gg(Gf(\mathcal{F}))$.

Для неперервних відображень в T_4-простори індуковані відображення зберігають деякі важливі підпростори просторів гіперпросторів включення.

Твердження 3.9.8. *Нехай $f : X \to Y$ – неперервне відображення з топологічного простору X в T_4-простір Y. Тоді,*

1) *$Gf(N_k(X)) \subset N_k(Y)$ для кожного $k \geq 2$;*
2) *$Gf(N_{<\omega}(X) \subset N_{<\omega}(Y)$;*
3) *$Gf(\lambda_2(X)) \subset \lambda_2(Y)$;*

4) $Gf(\mathrm{Fil}(X)) \subset \mathrm{Fil}(Y)$.

Доведення. 1. Зафіксуємо довільний k-зчеплений гіперпростір включення $\mathcal{F} \in N_k(X)$. Тоді, сім'я $f(\mathcal{F}) \subset \exp(Y)$ також є k-зчепленою. Залишається довести, що її замикання $\overline{f(\mathcal{F})} = Gf(\mathcal{F})$ є k-зчепленим. Припустивши протилежне, знайдемо k множин $A_1, \ldots, A_k \in \overline{f(\mathcal{F})}$ з порожнім перетином $A_1 \cap \cdots \cap A_k$. Повторюючи аргументи з доведення твердження 3.8.2, ми можемо так продовжити кожну множину A_i до відкритої множини $U_i \subset Y$, що $U_1 \cap \cdots \cap U_k = \emptyset$. Для кожного $i \le k$ множина $A_i \in \overline{f(\mathcal{F})}$ і, отже, відкритий окіл U_i множини A_i містить елемент з множини $f(\mathcal{F})$. Це дозволяє нам знайти замкнену множину $B_i \in f(\mathcal{F})$, $B_i \subset U_i$. Оскільки $B_i \subset U_i$ для всіх $i \le k$, то перетин $B_1 \cap \cdots \cap B_k$ є порожнім, що суперечить k-зчепленості $f(\mathcal{F})$.

2. Другий пункт відразу ж випливає з першого.

3. Припустимо, що $\mathcal{F} \in \lambda(X)$ є максимальною зчепленою системою. Оскільки $\mathcal{F}^{\perp} = \mathcal{F}$, то ми можемо застосувати твердження 3.9.1(3), щоб довести, що $Gf(\mathcal{F})^{\perp} = Gf(\mathcal{F}^{\perp}) = Gf(\mathcal{F})$. Остання рівність доводить, що $Gf(\mathcal{F})$ є максимальною зчепленою системою на Y.

4. Розглянемо довільний фільтр $\mathcal{F} \in \mathrm{Fil}(X)$ і його образ $Gf(\mathcal{F})$. Припустивши, що $Gf(\mathcal{F}) \notin \mathrm{Fil}(Y)$, знайдемо дві множини $A_1, A_2 \in Gf(\mathcal{F})$ з $A_1 \cap A_2 \notin Gf(\mathcal{F})$. Далі, знайдемо такий відкритий окіл $U \subset Y$ множини $A_1 \cap A_2$, який не містить жодної множини з $Gf(\mathcal{F})$. Повторюючи доведення твердження 3.8.1, використовуємо T_4-властивість Y, щоб знайти такі відкриті околи U_1 і U_2 множин A_1, A_2, що $U_1 \cap U_2 \subset U$. Далі, знайдемо такі замкнені множини $B_i \in f(\mathcal{F})$, що $B_i \subset U_i$ для $i = 1, 2$. Фільтр $\mathcal{F}$ містить прообрази $f^{-1}(B_1)$ і $f^{-1}(B_2)$ і, отже, містить їхній перетин $f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \cap B_2)$, звідки випливає, що $B_1 \cap B_2 \in f(\mathcal{F})$. Оскільки $B_1 \cap B_2 \subset U_1 \cap U_2 \subset U$, то ми одержуємо суперечність з вибором множини U як околу $A_1 \cap A_2$, який не містить жодної множини з $\overline{f(\mathcal{F})} \supset f(\mathcal{F})$. $\square$

Знайдемо умови, за яких відображення Gf є ін'єктивним. Кажемо, що ін'єктивне неперервне відображення $f : X \to Y$ між топологічними просторами є C^**-вкладенням*, якщо для довільних замкнених неперетинних множин $A, B \subset X$ їхні образи $f(A)$ і $f(B)$ мають неперетинні замикання в Y.

Твердження 3.9.9. *Якщо $f : X \to Y$ є C^*-вкладенням топологічного простору X в топологічний простір Y, то відображення $Gf : G(X) \to G(Y)$ є ін'ективним.*

Доведення. Зафіксуємо два різні гіперпростори включення $\mathcal{F}, \mathcal{E} \in G(X)$. Тоді або $\mathcal{F} \not\subset \mathcal{E}$ або $\mathcal{E} \not\subset \mathcal{F}$. Без втрати загальності можемо вважати, що $\mathcal{F} \not\subset \mathcal{E}$, тобто $F \notin \mathcal{E}$ для деякого $F \in \mathcal{F}$ і існує окіл $O(F) \subset X$ множини F, який не містить жодної множини $E \in \mathcal{E}$. Оскільки f є C^*-вкладенням, то множини $A = \mathrm{cl}_Y(f(F))$ і $B = \mathrm{cl}_Y(f(X \setminus O(F)))$ є диз'юнктними в Y. З означення $Gf(\mathcal{F})$ випливає, що $A \in Gf(\mathcal{F})$. З іншого боку, $A \notin Gf(\mathcal{E})$, бо A має окіл $Y \setminus B$, який не містить жодної множини $f(E)$, $E \in \mathcal{E}$ (припустивши протилежне $f(E) \subset Y \setminus B \subset Y \setminus f(X \setminus O(F))$, ми б одержали $E \subset f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus O(F))) = O(F)$, що суперечить вибору $O(F)$). □

Твердження 3.9.10. *Якщо $f : X \to Y$ є відображенням між T_1-просторами з всюди щільним образом $f(X)$ в Y, то образ $Gf(G(X))$ є всюди щільним в $G(Y)$.*

Доведення. Повторюючи доведення твердження 3.5.2, ми можемо показати, що $Gf(G^\bullet(X))$ є всюди щільним в $G(Y)$, звідки випливає всюди щільність $Gf(GX)$ в $G(Y)$. □

Наслідок 3.9.11. *Якщо $f : X \to Y$ є C^*-вкладенням простору X в нормальний простір Y з всюди щільним образом $f(X)$ в Y, то індуковане відображення $Gf : G(X) \to G(Y)$ є гомеоморфізмом.*

Доведення. За теоремою 3.2.1 і наслідком 3.2.2, простори $G(X)$ і $G(Y)$ є компактами. Таким чином, з тверджень 3.9.4–3.9.10 випливає, що відображення $Gf : G(X) \to G(Y)$ є неперервним, ін'єктивним, і має всюди щільний образ. Насамкінець, з компактності $G(X)$ випливає, що Gf – гомеоморфізм. □

Застосовуючи це твердження до вкладення нормального простору X в його компактифікацію Стоуна-Чеха $\beta(X)$ ми одержуємо, що простір $G(X)$ канонічно гомеоморфний до $G(\beta X)$. Цей факт вперше був доведений Мойсеєвим [13].

Наслідок 3.9.12. *Нехай X – нормальний простір і $f : X \to \beta(X)$ – вкладення простору X в його компактифікацію Стоуна-Чеха. Тоді відображення $Gf : G(X) \to G(\beta X)$ є гомеоморфізмом.*

Схожі твердження виконуються для деяких підпросторів простору $G(X)$.

Наслідок 3.9.13. *Нехай X – нормальний простір і $f : X \to \beta(X)$ – вкладення X в його компактифікацію Стоуна-Чеха. Тоді обмеження*

$$Gf|\mathrm{Fil}(X) : \mathrm{Fil}(X) \to \mathrm{Fil}(\beta X), \;\; Gf|N_{<\omega}(X) : N_{<\omega}(X) \to N_{<\omega}(\beta X),$$

$$Gf|\lambda(X) : \lambda(X) \to \lambda(\beta X), \quad Gf|N_k(X) : N_k(X) \to N_k(\beta X), \; k \geq 2,$$

є гомеоморфізмами.

Доведення. Ми дамо детальне доведення для просторів $N_k(X)$ і $\lambda(X)$. Для інших просторів доведення аналогічні.

Оскільки $Gf : G(X) \to G(\beta X)$ є гомеоморфізмом, то щоб довести, що обмеження $Gf|N_k(X) : N_k(X) \to N_k(\beta X)$ є гомеоморфізмом, достатньо перевірити рівність $Gf(N_k(X)) = N_k(\beta X)$. Згідно з твердженням 3.9.8, $Gf(N_k(X)) \subset N_k(\beta X)$, і твердження 3.8.2, простори $N_k(X)$ і $N_k(\beta X)$ є замкнені в компактах $G(X)$ і $G(\beta X)$.

Повторюючи доведення твердження 3.5.2, ми можемо показати, що $Gf(N_k^\bullet(X))$ є всюди щільною в $N_k(\beta X)$, звідки випливає всюди щільність $Gf(N_k(X))$ в $N_k(\beta X)$. З цього факту і компактності $Gf(N_k(X))$ і випливає потрібна рівність $Gf(N_k(X)) = N_k(\beta X)$.

Щоб довести, що $Gf|\lambda(X) : \lambda(X) \to \lambda(\beta X)$ є гомеоморфізмом, відмітимо, що $\lambda(X) = N_2(X) \cap N_2(X)^\perp$, де $N_2(X)^\perp = \{\mathcal{F}^\perp : \mathcal{F} \in N_2(X)\}$. Згідно з твердженням 3.9.1(3), $Gf(\mathcal{F}^\perp) = Gf(\mathcal{F})^\perp$ для кожного $\mathcal{F} \in G(X)$. Таким чином ми маємо:

$$Gf(\lambda(X)) = Gf(N_2(X) \cap N_2(X)^{\perp}) = Gf(N_2(X)) \cap Gf(N_2(X)^{\perp}) =$$
$$= Gf(N_2(X)) \cap Gf(N_2(X))^{\perp} = N_2(\beta X) \cap N_2(\beta X)^{\perp} = \lambda(\beta X).$$

□

3.10. Структура просторів $G(X)$ над скінченними просторами X

В цьому підрозділі ми розглянемо деякі факти про простір $G(X)$ і його підпростори для скінченного простору X. В цьому випадку простір $G(X)$ є скінченним. Проблема обчислення потужності $G(n)$ простору $G(X)$ для простору X потужності n є нетривіальною і тісно пов'язана з класичною (і досі не розв'язаною) проблемою Дедекінда [39], який запропонував обчислити число $M(n)$ всіх монотонних булевих функцій n булевих змінних. Функція $M(n)$ зростає дуже швидко. Її точні значення відомі тільки для $n \leq 8$ і наведені в наступній таблиці, яка взята з On-Line Encyclopedia of Integer Sequences [2].

Таблиця 3.1

Значення функції $M(n)$

n	$\lvert M(n)\rvert$
1	3
2	6
3	20
4	168
5	7581
6	7828354
7	2414682040998
8	56130437228687557907788

[2] www.research.att.com/cgi-bin/access.cgi/as/njas/sequences/eisA.cgi?Anum=000372

Відмітимо, що для кожного гіперпростору включення $\mathcal{F} \in G(X)$ його характеристична функція $\chi_{\mathcal{F}} : \mathcal{P}(X) \to \{0,1\}$ є монотонною по відношенню до відношення включення на степінь-множині $\mathcal{P}(X)$ простору X. Більше того, $\chi_{\mathcal{F}}(\emptyset) = 0$ і $\chi_F(X) = 1$. Навпаки, кожна монотонна функція $f : \mathcal{P}(X) \to \{0,1\}$ з $f(\emptyset) = 0$ і $f(X) = 1$ визначає гіперпростір включення $f^{-1}(1)$. Звідси випливає, що для скінченної множини X потужності n потужність $G(n)$ множини $G(X)$ дорівнює $M(n) - 2$. Таким чином, ми одержуємо значення $G(n)$ для $n \leq 8$. Потужність інших підмножин $G(X)$ для $|X| \leq 6$ наведено в наступній таблиці:

Таблиця 3.2

Потужності деяких підпросторів простору $G(X)$

n	$G(n)$	$N_2(n)$	$\lambda_2(n)$	$N_3(n)$	$\lambda_3(n)$	$N_4(n)$	$N_{<\omega}(n)$	$\mathrm{Fil}(n)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	3	2	3	2	3	3	3
3	18	11	4	10	3	10	10	7
4	166	80	12	54	5	53	53	15
5	7579	2645	81	762	20	687	686	31
6	7828352	?	2646	?	?	?	43285	63

Деякі значення в таблиці знайдені з допомогою комп'ютерних обчислень. З іншого боку, для $\mathrm{Fil}(n)$, $N_{<\omega}(n)$, і $\lambda_2(n)$ виконуються наступні рекурентні формули.

Твердження 3.10.1. *Для кожного $n \in \mathbb{N}$ справедливі наступні формули:*

1) $\mathrm{Fil}(n) = 2^n - 1$;
2) $N_{<\omega}(n) = \sum_{k=1}^{n} C_n^k (1 + G(n-k) - N_{<\omega}(n-k))$;
3) $N_k(n) = N_{<\omega}(n)$ *для* $k \geq n$;
4) $N_{n-1}(n) = 1 + N_{<\omega}(n)$;
5) $\lambda_2(n) = 1 + N_2(n-1)$.

Доведення. Нехай X – множина потужності $|X| = n$.

1. Оскільки для кожного фільтра $\mathcal{F}$ на X перетин $\cap\mathcal{F}$ є непорожньою множиною, породженою $\mathcal{F}$, то кількість фільтрів дорівнює кількості непорожніх підмножин множини X, яка дорівнює $2^n - 1$.

2. Для кожного центрованого гіперпростору включення $\mathcal{F}$ на X перетин $\cap\mathcal{F}$ є непорожнім. Зафіксуємо довільну непорожню підмножину $M = \{x_1, \dots, x_k\}$ множини X і розглянемо центровані сім'ї $\mathcal{F}$ з $\cap\mathcal{F} = M$. Найбільша з них породжується M. Всі інші мають вигляд $\mathcal{F} = \{M \cup A : A \in \mathcal{A}\}$, де $\mathcal{A}$ – гіперпростір включення на $X \setminus M$ з $\cap\mathcal{A} = \emptyset$. Кількість таких гіперпросторів включення $\mathcal{A}$ дорівнює $G(n-k) - N_{<\omega}(n-k)$. Таким чином, кількість всіх гіперпросторів включення $\mathcal{F}$ з $\cap\mathcal{F} = M$ дорівнює $1 + G(n-k) - N_{<\omega}(n-k)$. Оскільки кількість k-елементних підмножин множини X дорівнює C_n^k, то ми одержуємо, що

$$N_{<\omega}(n) = \sum_{k=1}^{n} C_n^k (1 + G(n-k) - N_{<\omega}(n-k)).$$

3. Припустимо, що для деякого $k \geq n$ існує k-зчеплений гіперпростір включення $\mathcal{F}$ на множині X, який не є $(k+1)$-зчепленим. Отже, існують $F_1, F_2, \dots, F_{k+1} \in \mathcal{F}$ з порожнім перетином $F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_{k+1}$. Таким чином, $X = (X \setminus F_1) \cup \ldots \cup (X \setminus F_{k+1})$. Оскільки $|X| = n$, то $X = \bigcup_{i \in I} X \setminus F_i$ для деякої множини $I \subset \{1, \dots, k+1\}$ потужності $|I| \leq n$. Отже, $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$, що суперечить k-зчепленості $\mathcal{F}$. Таким чином, кожен n-зчеплений гіперпростір включення на X є центрованим, звідки випливає $N_n(n) = N_{<\omega}(n)$.

4. Рівність $N_{n-1}(n) = 1 + N_n(n) = 1 + N_{<\omega}(n)$ буде доведена як тільки ми покажемо, що кожен $(n-1)$-зчеплений, але не n-зчеплений гіперпростір включення $\mathcal{F}$ на X збігається з гіперпростором включення $\mathcal{L} = \{L \subset X : |L| \geq n-1\}$. Спершу перевіримо, що $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}$. Припустивши, що $\mathcal{F} \not\subset \mathcal{L}$, знайдемо множину $F \in \mathcal{F}$ потужності $|F| \leq n-2$. Отже, гіперпростір включення $\mathcal{F}' = \{F \cap A : A \in \mathcal{A}\}$ на F є $(n-2)$-зчепленим і центрованим згідно попереднього пункту. Таким чином, гіперпростір включення $\mathcal{F}$ є також центрованим, що суперечить тому, що $\mathcal{F}$ не є n-зчепленим. Таким чином $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}$, тобто $|F| \geq n-1$ для всіх $F \in \mathcal{F}$.

Оскільки гіперпростір включення $\mathcal{F}$ не є n-зчепленим, то існують множини $F_1, F_2, \ldots F_n \in \mathcal{F}$ з порожнім перетином $F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n$. З $|X \setminus F_i| \leq 1$, $i \leq n$, і $X = (X \setminus F_1) \cup \ldots \cup (X \setminus F_n)$ випливає, що

$$\{X \setminus F_i : i \leq n\} = \{A \subset X : |A| = 1\}.$$

Тоді $\mathcal{L} \subset \{X, F_i : i \leq n\} \subset \mathcal{F}$ і, отже, $\mathcal{F} = \mathcal{L}$.

5. Зафіксуємо довільний елемент $x \in X$ і розглянемо довільну максимальну зчеплену систему $\mathcal{L}$. Якщо $\mathcal{L}$ не є ультрафільтром, породженим x, то сім'я

$$\mathcal{L}_0 = \{A \in \mathcal{L} : A \subset X \setminus \{x\}\}$$

є зчепленою системою на $X \setminus \{x\}$. З максимальності $\mathcal{L}$ випливає, що

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \cup \{A \subset X : x \in A,\ A \setminus \{x\} \in \mathcal{L}_0^{\perp}\}.$$

Таким чином, кількість максимальних зчеплених систем дорівнює збільшеній на одиницю кількості зчеплених систем на $X \setminus \{x\}$, що можна записати наступним чином

$$\lambda(n) = 1 + N_2(n-1).$$

$\square$

Висновки до розділу 3

В цьому розділі, маючи довільний топологічний простір X, ми визначили простір $G(X)$ гіперпросторів включення на X і показали, що $G(X)$ є суперкомпактним T_1-простором. Використовуючи взаємозв'язок $G(X)$ з розширенням Волмена $\omega(X)$, ми довели, що простір $G(X)$ є гаусдорфовим тоді і тільки тоді, коли X – нормальний. Добре відомо, що конструкція простору гіперпросторів включення є функторіальною в категорії компактів, див. [66]. Ми продовжили цю конструкцію на категорію нормальних топологічних просторів і показали, що для нормального простору X простір $G(X)$ канонічно гомеоморфний $G(\beta X)$, де $\beta(X) = \omega(X)$ – компактифікація Стоуна-Чеха простору X. Іншим методом цей взаємозв'язок показаний також Є.Мойсєєвим [13]. Також ми розглянули важливі підпростори простору $G(X)$: підпростір фільтрів $\mathrm{Fil}(X)$, k-зчеплених систем $N_k(X)$, максимальних k-зчеплених систем $\lambda_k(X)$.

Основним результатом третього розділу є дуальна характеризація 3.7.1 гіперпросторів включення зі скінченними носіями. Ця характеризація суттєво використовуватиметься в теоремі 4.6.1 для опису топологічного центру напівгрупи $G(X)$ над дискретною групою X. Вона звучить наступним чином: гіперпростір включення $\mathcal{F}$ на T_1-просторі X має скінченний носій тоді і тільки тоді, коли гіперпростори включення $\mathcal{F}$ і $\mathcal{F}^{\perp}$ мають бази, що складаються зі скінченних множин.

РОЗДІЛ 4
АЛГЕБРА В ПРОСТОРІ ГІПЕРПРОСТОРІВ ВКЛЮЧЕННЯ

У цьому розділі ми покажемо, що бінарна операція, визначена на дискретному топологічному просторі S, продовжується не тільки на $\beta(S)$, але також і на найменшу повну підґратку $G(S) \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(S))$, що містить $\beta(S)$. Ми вивчатимемо деякі важливі властивості напівгрупової операції на $G(S)$ і їх взаємозв'язок з ґратковою структурою $G(S)$, а також опишемо структуру напівгруп $G(S)$.

4.1. Продовження алгебраїчних операцій до гіперпросторів включення

В цьому підрозділі, маючи бінарну (асоціативну) операцію $* : X \times X \to X$ на дискретному просторі X ми продовжимо її до правотопологічної (асоціативної) операції на $G(X)$, використовуючи ту ж формулу, що і для множення ультрафільтрів, а саме: добуток $\mathcal{U} \circ \mathcal{F}$ двох гіперпросторів включення $\mathcal{U}$ і $\mathcal{F}$ визначимо формулою

$$\mathcal{U} \circ \mathcal{F} = \langle \bigcup_{x \in U} x * F_x : U \in \mathcal{U},\ \{F_x\}_{x \in U} \subset \mathcal{F} \rangle$$

Доведемо деякі властивості операції $\circ$ на $G(X)$.

Покажемо, що якщо магма $(X, *)$ є напівгрупою, то $(G(X), \circ)$ також є напівгрупою.

Твердження 4.1.1. *Якщо операція $*$ на X асоціативна, то такою ж є індукована операція $\circ$ на $G(X)$.*

Доведення. Необхідно показати, що $(\mathcal{U} \circ \mathcal{V}) \circ \mathcal{W} = \mathcal{U} \circ (\mathcal{V} \circ \mathcal{W})$ для довільних гіперпросторів включення $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$.

Розглянемо довільну множину $A \in (\mathcal{U} \circ \mathcal{V}) \circ \mathcal{W}$ і оберемо таку множину $B \in \mathcal{U} \circ \mathcal{V}$, що $A \supset \bigcup_{z \in B} z * W_z$ для деякої сім'ї $\{W_z\}_{z \in B} \subset \mathcal{W}$. Далі, для множини $B \in$

$\mathcal{U}\circ\mathcal{V}$ оберемо таку множину $U\in\mathcal{U}$, що $B\supset\bigcup\limits_{x\in U} x*V_x$ для деякої сім'ї $\{V_x\}_{x\in U}\subset\mathcal{V}$. Легко бачити, що для кожного $x\in U$ і $y\in V_x$ добуток $x*y$ належить B і, отже, W_{x*y} є визначеною. Таким чином, $\bigcup\limits_{y\in V_x} y*W_{x*y}\in\mathcal{V}\circ\mathcal{W}$ для всіх $x\in U$ і, отже, $\bigcup\limits_{x\in U} x*(\bigcup\limits_{y\in V_x} y*W_{x*y})\in\mathcal{U}\circ(\mathcal{V}\circ\mathcal{W})$. Оскільки $\bigcup\limits_{x\in U}\bigcup\limits_{y\in V_x} x*y*W_{x*y}\subset A$, то ми одержуємо $A\in\mathcal{U}\circ(\mathcal{V}\circ\mathcal{W})$. Це доводить включення $(\mathcal{U}\circ\mathcal{V})\circ\mathcal{W}\subset\mathcal{U}\circ(\mathcal{V}\circ\mathcal{W})$.

Щоб довести протилежне включення, зафіксуємо множину $A\in\mathcal{U}\circ(\mathcal{V}\circ\mathcal{W})$ і оберемо таку множину $U\in\mathcal{U}$, що $A\supset\bigcup\limits_{x\in U} x*B_x$ для деякої сім'ї $\{B_x\}_{x\in U}\subset\mathcal{V}\circ\mathcal{W}$. Далі, для кожного $x\in U$ знайдемо таку множину $V_x\in\mathcal{V}$, що $B_x\supset\bigcup\limits_{y\in V_x} y*W_{x,y}$ для деякої сім'ї $\{W_{x,y}\}_{y\in V_x}\subset\mathcal{W}$. Нехай $Z=\bigcup\limits_{x\in U} x*V_x$. Для кожного $z\in Z$ знайдемо такі $x\in U$ і $y\in V_x$, що $z=x*y$ і покладемо $W_z=W_{x,y}$. Тоді $Z\in\mathcal{U}\circ\mathcal{V}$ і $\bigcup\limits_{z\in Z} z*W_z\in(\mathcal{U}\circ\mathcal{V})\circ\mathcal{W}$. Взявши до уваги, що $\bigcup\limits_{z\in Z} z*W_z\subset\bigcup\limits_{x\in U}\bigcup\limits_{y\in V_x} x*y*W_{x,y}\subset A$, одержуємо $A\in(\mathcal{U}\circ\mathcal{V})\circ\mathcal{W}$. □

Твердження 4.1.2. *Операція $\circ$ комутує з операцією трансверсалі в тому сенсі, що $(\mathcal{U}\circ\mathcal{V})^\perp=\mathcal{U}^\perp\circ\mathcal{V}^\perp$ для всіх $\mathcal{U},\mathcal{V}\in G(X)$.*

Доведення. Щоб довести включення $\mathcal{U}^\perp\circ\mathcal{V}^\perp\subset(\mathcal{U}\circ\mathcal{V})^\perp$, зафіксуємо довільний елемент $A\in\mathcal{U}^\perp\circ\mathcal{V}^\perp$. Потрібно перевірити, що A перетинає кожну множину $B\in\mathcal{U}\circ\mathcal{V}$. Без втрати загальності можемо вважати, що множини A і B є базовими:

$$A=\bigcup_{x\in F} x*G_x \quad \text{для деяких множин } F\in\mathcal{U}^\perp \text{ і } \{G_x\}_{x\in F}\subset\mathcal{V}^\perp$$

та

$$B=\bigcup_{x\in U} x*V_x \quad \text{для деяких множин } U\in\mathcal{U} \text{ і } \{V_x\}_{x\in U}\subset\mathcal{V}.$$

Оскільки $U\in\mathcal{U}$ і $F\in\mathcal{U}^\perp$, то перетин $F\cap U$ містить деяку точку x. Для цієї точки x множини $V_x\in\mathcal{V}$ і $G_x\in\mathcal{V}^\perp$ є коректно визначеними і їхній перетин $V_x\cap G_x$ містить деяку точку y. Далі, перетин $A\cap B$ містить точку $x*y$ і, отже, непорожній, що доводить належність $A\in(\mathcal{U}\circ\mathcal{V})^\perp$.

Для доведення включення $(\mathcal{U}\circ\mathcal{V})^\perp\subset\mathcal{U}^\perp\circ\mathcal{V}^\perp$, зафіксуємо множину $A\in(\mathcal{U}\circ\mathcal{V})^\perp$. Ми стверджуємо, що множина

$$F=\{x\in X: x^{-1}A\in\mathcal{V}^\perp\}$$

належить до $\mathcal{U}^\perp$ (тут $x^{-1}A=\{y\in X: x*y\in A\}$). Припустивши протилежне, що $F\notin\mathcal{U}^\perp$, знайдемо таку множину $U\in\mathcal{U}$, що $F\cap U=\emptyset$. За означенням F, для кожного $x\in U$ множина $x^{-1}A\notin\mathcal{V}^\perp$ і, отже, ми можемо знайти множину $V_x\in\mathcal{V}$, для якої перетин $V_x\cap x^{-1}A$ є порожнім. За означенням добутку $\mathcal{U}\circ\mathcal{V}$, множина $B=\bigcup_{x\in U}x*V_x$ належить до $\mathcal{U}\circ\mathcal{V}$ і, отже, перетинає множину A. Таким чином, $x*y\in A$ для деякого $x\in U$ і $y\in V_x$. З $x*y\in A$ випливає, що $y\in x^{-1}A\subset X\setminus V_x$, що є протиріччям, яке доводить належність $F\in\mathcal{U}^\perp$. Отже, множини $A\supset\bigcup_{x\in F}x*x^{-1}A$ належать $\mathcal{U}^\perp\circ\mathcal{V}^\perp$. □

Твердження 4.1.3. *Рівність* $(\mathcal{U}\cap\mathcal{V})\circ\mathcal{W}=(\mathcal{U}\circ\mathcal{W})\cap(\mathcal{V}\circ\mathcal{W})$ *виконано для довільних* $\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{W}\in G(X)$.

Доведення. Легко перевірити, що $(\mathcal{U}\cap\mathcal{V})\circ\mathcal{W}\subset(\mathcal{U}\circ\mathcal{W})\cap(\mathcal{V}\circ\mathcal{W})$.

Щоб довести протилежне включення, зафіксуємо множину $F\in(\mathcal{U}\circ\mathcal{W})\cap(\mathcal{V}\circ\mathcal{W})$. Тоді

$$F\supset\bigcup_{x\in U}x*W'_x \text{ і } F\supset\bigcup_{y\in V}y*W''_y$$

для деякого $U\in\mathcal{U}$, $\{W'_x\}_{x\in U}\subset\mathcal{W}$, і $V\in\mathcal{V}$, $\{W''_y\}_{y\in V}\subset\mathcal{W}$. Оскільки $\mathcal{U},\mathcal{V}$ є гіперпросторами включення, то $U\cup V\in\mathcal{U}\cap\mathcal{V}$. Для кожного $z\in U\cup V$ покладемо $W_z=W'_z$, якщо $z\in U$ і $W_z=W''_z$, якщо $z\notin U$. Звідси випливає, що $F\supset\bigcup\limits_{z\in U\cup V}z*W_z$ і, отже, $F\in(\mathcal{U}\cap\mathcal{V})\circ\mathcal{W}$. □

Цілком аналогічно доводиться наступне

Твердження 4.1.4. *Для довільних* $\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{W}\in G(X)$ *і* $a\in X$

$$a\circ(\mathcal{V}\cup\mathcal{W})=(a\circ\mathcal{V})\cup(a\circ\mathcal{W}) \quad \text{і} \quad a\circ(\mathcal{V}\cap\mathcal{W})=(a\circ\mathcal{V})\cap(a\circ\mathcal{W}).$$

Співставляючи твердження 4.1.2 і 4.1.3 одержуємо

Наслідок 4.1.5. *Для довільних $\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{W}\in G(X)$ виконується рівність*

$$(\mathcal{U}\cup\mathcal{V})\circ\mathcal{W}=(\mathcal{U}\circ\mathcal{W})\cup(\mathcal{V}\circ\mathcal{W}).$$

Доведення. Справді,

$$\begin{aligned}(\mathcal{U}\cup\mathcal{V})\circ\mathcal{W}=\big(((\mathcal{U}\cup\mathcal{V})\circ\mathcal{W})^\perp\big)^\perp&=((\mathcal{U}\cup\mathcal{V})^\perp\circ\mathcal{W}^\perp)^\perp=\\ &=((\mathcal{U}^\perp\cap\mathcal{V}^\perp)\circ\mathcal{W}^\perp)^\perp=((\mathcal{U}^\perp\circ\mathcal{W}^\perp)\cap(\mathcal{V}^\perp\circ\mathcal{W}^\perp))^\perp=\\ &=(\mathcal{U}^\perp\circ\mathcal{W}^\perp)^\perp\cup(\mathcal{V}^\perp\circ\mathcal{W}^\perp)^\perp=(\mathcal{U}\circ\mathcal{W})\cup(\mathcal{V}\circ\mathcal{W}).\end{aligned}$$

□

Твердження 4.1.6. *Для кожної дискретної магми $(X,*)$ простір $G(X)$, наділений продовженою операцією $\circ$, є правотопологічною магмою, топологічний центр якої містить X.*

Доведення. Спершу перевіримо, що для довільного $\mathcal{U}\in G(X)$ правий зсув $R_\mathcal{U}:G(X)\to G(X)$, $R_\mathcal{U}:\mathcal{F}\mapsto\mathcal{F}\circ\mathcal{U}$, є неперервним.

Зафіксуємо довільні гіперпростори включення $\mathcal{F}$,$\mathcal{U}\in G(X)$ і нехай W^+ – передбазовий окіл їхнього добутку $\mathcal{F}\circ\mathcal{U}$. Знайдемо такі множини $F\in\mathcal{F}$ і $\{U_x\}_{x\in F}\subset\mathcal{U}$, що $\bigcup\limits_{x\in F}x*U_x\subset W$. Тоді F^+ є околом $\mathcal{F}$, для якого $F^+\circ\mathcal{U}\subset W^+$.

Тепер припустимо, що $\mathcal{F}\circ\mathcal{U}\in W^-$ для деякої $W\subset X$. Відмітимо, що для довільного гіперпростору включення $\mathcal{V}\in G(X)$ виконуються рівносильності $\mathcal{V}\in W^-\Leftrightarrow W\in\mathcal{V}^\perp\Leftrightarrow\mathcal{V}^\perp\in W^+$. Таким чином, $\mathcal{F}\circ\mathcal{U}\in W^-$ рівносильна $\mathcal{F}^\perp\circ\mathcal{U}^\perp=(\mathcal{F}\circ\mathcal{U})^\perp\in W^+$. Згідно з попереднім випадком, існує такий окіл $O(\mathcal{F}^\perp)$, що $O(\mathcal{F}^\perp)\circ\mathcal{U}^\perp\subset W^+$. Тепер з неперервності операції трансверсалі випливає, що $O(\mathcal{F}^\perp)^\perp$ є околом $\mathcal{F}$ з $O(\mathcal{F}^\perp)^\perp\circ\mathcal{U}\subset W^-$.

Насамкінець, доведемо, що для кожного $a\in X$ лівий зсув $L_a:G(X)\to G(X)$, $L_a:\mathcal{F}\mapsto a\circ\mathcal{F}$, є неперервним. Розглянемо відкриту множину $W^+\subset G(X)$ і відмітимо, що $L_a^{-1}(W^+)$ є відкритим, бо $L_a^{-1}(W^+)=(a^{-1}W)^+$, де $a^{-1}W=\{x\in X:a*x\in W\}$. З другого боку, $a\circ\mathcal{F}\in W^-$ рівносильне тому, що $a\circ\mathcal{F}^\perp=(a\circ\mathcal{F})^\perp\in(W^-)^\perp=W^+$, звідки випливає, що прообраз

$$L_a^{-1}(W^-)=(L_a(W^+))^\perp$$

також є відкритим. □

Наступна теорема єдиності показує, що продовжена операція $\circ$ на $G(X)$ є єдиною операцією, для якої виконуються вищедоведені властивості.

Теорема 4.1.7. *Для кожної магми $(X,*)$ продовжена операція $\circ$ на $G(X)$ є єдиною бінарною операцією на $G(X)$, яка має наступні властивості:*

1) $(\mathcal{U}\cup\mathcal{V})\circ\mathcal{W}=(\mathcal{U}\circ\mathcal{W})\cup(\mathcal{V}\circ\mathcal{W})$;

2) $(\mathcal{U}\cap\mathcal{V})\circ\mathcal{W}=(\mathcal{U}\circ\mathcal{W})\cap(\mathcal{V}\circ\mathcal{W})$;

3) $a\circ(\mathcal{V}\cup\mathcal{W})=(a\circ\mathcal{V})\cup(a\circ\mathcal{W})$;

4) $a\circ(\mathcal{V}\cap\mathcal{W})=(a\circ\mathcal{V})\cap(a\circ\mathcal{W})$;

5) *для кожного $\mathcal{U}\in G(X)$ правий зсув $R_{\mathcal{U}}:G(X)\to G(X)$, $R_{\mathcal{U}}:\mathcal{F}\mapsto\mathcal{F}\circ\mathcal{U}$, є неперервним;*

6) *для кожного $a\in X$ лівий зсув $L_a:G(X)\to G(X)$, $L_a:\mathcal{F}\mapsto a\circ\mathcal{F}$, є неперервним.*

Доведення. Нехай $\star$ є іншою бінарною операцією, яка задовольняє умови теореми. Тоді $x\star y=x\circ y$ для довільних двох точок $x,y\in X\subset G(X)$. Спершу перевіримо, що $a\star\mathcal{F}=a\circ\mathcal{F}$ для кожного $a\in X$ і $\mathcal{F}\in G(X)$. Оскільки ліві зсуви $\mathcal{F}\mapsto a\star\mathcal{F}$ і $\mathcal{F}\mapsto a\circ\mathcal{F}$ є неперервними, то достатньо перевірити рівність $a\star\mathcal{F}=a\circ\mathcal{F}$ для гіперпросторів включення $\mathcal{F}$, які мають скінченні носії в X (бо множина $G^\bullet(X)$ всіх таких гіперпросторів включення є всюди щільною в $G(X)$, див. твердження 3.5.2). Кожен такий гіперпростір включення $\mathcal{F}$ породжується скінченною сім'єю скінченних підмножин простору X. Якщо $\mathcal{F}=\uparrow F$ породжений однією скінченною множиною $F=\{a_1,\dots,a_n\}\subset X$, то $\mathcal{F}=\bigcap_{i=1}^n\uparrow a_i$ є скінченним перетином головних ультрафільтрів, і, отже,

$$\uparrow a\star\mathcal{F}=\uparrow a\star\bigcap_{i=1}^n\uparrow a_i=\bigcap_{i=1}^n\uparrow a\star\uparrow a_i=\bigcap_{i=1}^n\uparrow a\circ\uparrow a_i=\uparrow a\circ\bigcap_{i=1}^n\uparrow a_i=\uparrow a\circ\mathcal{F}.$$

Якщо $\mathcal{F}=\uparrow\{F_1,\dots,F_n\}$ породжений скінченною сім'єю скінченних множин, то $\mathcal{F}=\bigcup_{i=1}^n\uparrow F_i$ і ми можемо використати попередній випадок для доведення рівностей

$$\uparrow a\star\mathcal{F}=\uparrow a\star\bigcup_{i=1}^{n}\uparrow F_i=\bigcup_{i=1}^{n}\uparrow a\star\uparrow F_i=\bigcup_{i=1}^{n}\uparrow a\circ\uparrow F_i=\uparrow a\circ\bigcup_{i=1}^{n}\uparrow F_i=\uparrow a\circ\mathcal{F}.$$

Далі, зафіксувавши довільний гіперпростір включення $\mathcal{U}\in G(X)$, схожими аргументами можна довести, що $\mathcal{F}\star\mathcal{U}=\mathcal{F}\circ\mathcal{U}$ для всіх гіперпросторів включення $\mathcal{F}\in G^\bullet(X)$, що мають скінченний носій в X. Насамкінець, використовуючи всюди щільність $G^\bullet(X)$ в $G(X)$ і неперервність правих зсувів $\mathcal{F}\mapsto\mathcal{F}\circ\mathcal{U}$ і $\mathcal{F}\mapsto\mathcal{F}\star\mathcal{U}$ легко перевірити рівність $\mathcal{F}\star\mathcal{U}=\mathcal{F}\circ\mathcal{U}$ для всіх гіперпросторів включення $\mathcal{F}\in G(X)$. □

4.2. Гомоморфізми магм гіперпросторів включення

Зауважимо, що наша конструкція продовження бінарної операції з X на $G(X)$ добре працює як для асоціативних, так і для неасоціативних операцій. В попередньому підрозділі ми показали, що для кожної магми (напівгрупи) X простір $G(X)$ є магмою (напівгрупою) по відношенню до продовженої операції.

Твердження 4.2.1. *Для кожного гомоморфізму $h:X_1\to X_2$ між магмами $(X_1,*_1)$ та $(X_2,*_2)$ індуковане відображення $Gh:G(X_1)\to G(X_2)$ є гомоморфізмом магм $G(X_1)$ та $G(X_2)$.*

Доведення. Зафіксувавши два гіперпростори включення $\mathcal{U},\mathcal{V}\in G(X_1)$, одержимо

$$\begin{aligned}
Gh(\mathcal{U}\circ_1\mathcal{V}) &= Gh(\langle\bigcup_{x\in U}x*_1V_x : U\in\mathcal{U},\ \{V_x\}_{x\in U}\subset\mathcal{V}\rangle)=\\
&=\langle h(\bigcup_{x\in U}x*_1V_x) : U\in\mathcal{U},\ \{V_x\}_{x\in U}\subset\mathcal{V}\rangle=\\
&=\langle\bigcup_{x\in U}h(x)*_2h(V_x) : U\in\mathcal{U},\ \{V_x\}_{x\in U}\subset\mathcal{V}\rangle=\\
&=\langle\bigcup_{x\in h(U)}x*_2h(V_x) : U\in\mathcal{U},\ \{h(V_x)\}_{x\in U}\subset Gh(\mathcal{V})\rangle=\\
&=\langle h(U):U\in\mathcal{U}\rangle\circ_2\langle h(V):V\in\mathcal{V}\rangle=Gh(\mathcal{U})\circ_2Gh(\mathcal{V}).
\end{aligned}$$

□

Переформулювавши твердження 4.1.2 в термінах гомоморфізмів, одержуємо

Твердження 4.2.2. *Для кожної магми X відображення трансверсалі $\perp\colon G(X) \to G(X)$ є гомоморфізмом магми $G(X)$.*

4.3. Підмагми $G(X)$

В цьому підрозділі ми покажемо, що для магми X, наділеної дискретною топологією, всі (топологічно) замкнені підпростори $G(X)$, розглянуті в підрозділі 3.8, є підмагмами $G(X)$.

Вважаємо, що $* : X \times X \to X$ є бінарною операцією на просторі X і $\circ : G(X) \times G(X) \to G(X)$ є продовженням $*$ на $G(X)$. Застосовуючи твердження 4.2.2, одержуємо

Твердження 4.3.1. *Якщо S є підмагмою $G(X)$, то $S^\perp$ є підмагмою $G(X)$.*

Наступні твердження легко випливають з означення операції $\circ$ на $G(X)$.

Твердження 4.3.2. *Множини* $\mathrm{Fil}(X)$, *$N_{<\omega}(X)$ і $N_k(X)$, $k \geq 2$, є підмагмами в $G(X)$.*

Твердження 4.3.3. *Компактифікація Стоуна-Чеха $\beta(X)$ і суперрозширення $\lambda(X)$ є замкненими підмагмами в $G(X)$.*

Доведення. Суперрозширення $\lambda(X)$ є підмагмою $G(X)$, оскільки є перетином $\lambda(X) = N_2(X) \cap (N_2(X))^\perp$ двох підмагм магми $G(X)$. Аналогічно, $\beta(X) = \mathrm{Fil}(X) \cap \lambda(X)$ є підмагмою $G(X)$. □

Зауваження 4.3.4. На відміну від $\lambda(X)$, для $k \geq 3$ підмножина $\lambda_k(X)$ не завжди є підмагмою магми $G(X)$. Наприклад, для циклічної групи $C_5 =$

$\{0,1,2,3,4\}$ підмножина $\lambda_3(C_5)$ магми $G(C_5)$ містить максимальну 3-зчеплену систему

$$\mathcal{L} = \langle \{0,1,2\}, \{0,1,4\}, \{0,2,4\}, \{1,2,4\} \rangle,$$

квадрат якої

$$\mathcal{L} \circ \mathcal{L} = \langle \{1,2,4,5\}, \{0,2,3,4\}, \{0,1,3,4\}, \{0,1,2,4\}, \{0,1,2,3\} \rangle$$

не є максимальною 3-зчепленою системою.

Виходячи з означення операції $\circ$ на $G(X)$, легко довести наступне

Твердження 4.3.5. *Множина $G^{\bullet}(X)$ всіх гіперпросторів включення зі скінченними носіями є підмагмою магми $G(X)$.*

Насамкінець, знайдемо умови на операцію $*$, які гарантують, що підмножина $G^{\circ}(X)$ вільних гіперпросторів включення є підмагмою $G(X)$.

Твердження 4.3.6. *Припустимо, що для кожного $b \in X$ існує така скінченна множина $F \subset X$, що для кожного $a \in X \setminus F$ множина $a^{-1}b = \{x \in X : a{*}x = b\}$ є скінченною. Тоді множина $G^{\circ}(X)$ є замкненою підмагмою магми $G(X)$ і, отже,* $\mathrm{Fil}^{\circ}(X)$, $\lambda^{\circ}(X)$, $\beta^{\circ}(X)$ *є замкненими підмагмами в $G(X)$.*

Доведення. Зафіксуємо два гіперпростори включення $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in G(X)$ і підмножину $C \in \mathcal{A} \circ \mathcal{B}$. Потрібно довести, що $C \setminus K \in \mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ для кожної компактної підмножини $K \subset X$. Без втрати загальності вважаємо, що множина C є базовою: $C = \bigcup_{a \in A} a * B_a$ для деякої множини $A \in \mathcal{A}$ і деякої сім'ї $\{B_a\}_{a \in A} \subset \mathcal{B}$.

Оскільки X є дискретним, то множина K є скінченною. За припущенням, існує така скінченна множина $F \subset X$, що для кожного $a \in X \setminus F$ множина $a^{-1}K = \{x \in X : a * x \in K\}$ є скінченною. Гіперпростір $\mathcal{A}$, будучи вільним, містить множину $A' = A \setminus F$. Аналогічно, для кожного $a \in A'$ гіперпростір $\mathcal{B}$ містить множину $B'_a = B_a \setminus a^{-1}K$. Оскільки $C \setminus K \supset \bigcup_{a \in A'} a * B'_a \in \mathcal{A} \circ \mathcal{B}$, то ми одержуємо, що $C \setminus K \in \mathcal{A} \circ \mathcal{B}$. $\square$

Зауваження 4.3.7. Якщо X є напівгрупою, то $G(X)$ є напівгрупою і всі підмагми, розглянуті вище, є піднапівгрупами напівгрупи $G(X)$. Деякі з них є добре відомими в теорії напівгруп. Зокрема, такою є напівгрупа $\beta(X)$ ультрафільтрів і $\beta^\circ(X) = \beta(X) \setminus X$ вільних ультрафільтрів. Напівгрупа $\mathrm{Fil}(X)$ містить ізоморфну копію степінь-напівгрупи X, яка є гіперпростором $\exp(X)$, наділеним напівгруповою операцією $A * B = \{a * b : a \in A,\ b \in B\}$.

4.4. Ідеали і нулі в $G(X)$

Для магми $(X, *)$ праві нулі в $G(X)$ мають простий опис. Кажемо, що гіперпростір включення $\mathcal{A} \in G(X)$ є *інваріантним*, якщо для кожного $A \in \mathcal{A}$ і $x \in X$ множини $x * A$ і $x^{-1}A = \{y \in X : x * y \in A\}$ належать до $\mathcal{A}$.

Твердження 4.4.1. *Гіперпростір включення $\mathcal{A} \in G(X)$ є правим нулем в $G(X)$ тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{A}$ є інваріантним.*

Доведення. Припустимо, що гіперпростір включення $\mathcal{A} \in G(X)$ є інваріантним і покажемо, що $\mathcal{B} \circ \mathcal{A} = \mathcal{A}$ для кожного $\mathcal{B} \in G(X)$. Зафіксуємо довільну множину $F \in \mathcal{B} \circ \mathcal{A}$ і знайдемо таку множину $B \in \mathcal{B}$ і сім'ю $\{A_x\}_{x \in B} \subset \mathcal{A}$, що $\bigcup\limits_{x \in B} x * A_x \subset F$. Оскільки $\mathcal{A} \in G(X)$ є інваріантним, то $\bigcup\limits_{x \in B} x * A_x \in \mathcal{A}$ і, отже, $F \in \mathcal{A}$. Тим самим доведено включення $\mathcal{B} \circ \mathcal{A} \subset \mathcal{A}$. З другого боку, для кожного $F \in \mathcal{A}$ і кожного $x \in X$ одержуємо $x^{-1}F \in \mathcal{A}$ і, отже, $F \supset \bigcup\limits_{x \in X} x * x^{-1}F \in \mathcal{B} \circ \mathcal{A}$. Таким чином, $\mathcal{A}$ є правим нулем напівгрупи $G(X)$.

Нехай тепер $\mathcal{A}$ є правим нулем $G(X)$. Відмітимо, що для кожного $x \in X$ з рівності $\uparrow x \circ \mathcal{A} = \mathcal{A}$ випливає, що $x * A \in \mathcal{A}$ для кожного $A \in A$.

З другого боку, з рівності $\{X\} \circ \mathcal{A} = \mathcal{A}$ випливає, що для кожного $A \in \mathcal{A}$ існує така сім'я $\{A_x\}_{x \in X} \subset \mathcal{A}$, що $\bigcup_{x \in X} x * A_x \subset A$. Отже, для кожного $x \in X$ множина $x^{-1}A = \{z \in X : x * z \in A\} \supset A_x \in \mathcal{A}$ належить $\mathcal{A}$, звідки випливає, що $\mathcal{A}$ є інваріантним. $\square$

Через $\overleftrightarrow{G}(X)$ позначимо множину всіх інваріантних гіперпросторів включення в $G(X)$. З твердження 4.4.1 випливає, що $\mathcal{A}\circ\mathcal{B}=\mathcal{B}$ для кожних $\mathcal{A},\mathcal{B}\in\overleftrightarrow{G}(X)$. Таким чином, $\overleftrightarrow{G}(X)$ є напівгрупою правих нулів.

Твердження 4.4.2. *Множина $\overleftrightarrow{G}(X)$ є замкненою в $G(X)$, є напівгрупою правих нулів магми $G(X)$ і замкненою повною підґраткою ґратки $G(X)$, яка інваріантна відносно трансверсалі. Більше того, якщо $\overleftrightarrow{G}(X)$ є непорожньою, то вона є лівим ідеалом, що лежить в кожному правому ідеалі магми $G(X)$.*

Доведення. Якщо $\mathcal{A}\in G(X)\setminus\overleftrightarrow{G}(X)$, то існують такі $x\in X$ і $A\in\mathcal{A}$, що $x*A\notin\mathcal{A}$ або $x^{-1}A\notin\mathcal{A}$. Тоді

$$O(\mathcal{A})=\{\mathcal{A}'\in G(X): A\in\mathcal{A}' \text{ і } (x*A\notin\mathcal{A}' \text{ або } x^{-1}A\notin\mathcal{A})\}$$

є відкритим околом $\mathcal{A}$, який не перетинає множину $\overleftrightarrow{G}(X)$ і, отже, множина $\overleftrightarrow{G}(X)$ є замкненою $G(X)$.

Оскільки $\mathcal{A}\circ\mathcal{B}=\mathcal{B}$ для кожного $\mathcal{A},\mathcal{B}\in\overleftrightarrow{G}(X)$, то множина $\overleftrightarrow{G}(X)$ є напівгрупою правих нулів магми $G(X)$.

Щоб довести, що $\overleftrightarrow{G}(X)$ є інваріантною відносно трансверсалі, відмітимо, що для кожного $\mathcal{A}\in G(X)$ і $\mathcal{Z}\in\overleftrightarrow{G}(X)$ виконано $\mathcal{A}\circ\mathcal{Z}^\perp=(\mathcal{A}^\perp\circ\mathcal{Z})^\perp=\mathcal{Z}^\perp$, звідки випливає, що $\mathcal{Z}^\perp$ є правим нулем в $G(X)$ і, отже, належить $\overleftrightarrow{G}(X)$, згідно з твердженням 4.4.1.

Для доведення того, що $\overleftrightarrow{G}(X)$ є повною підґраткою ґратки $G(X)$ необхідно перевірити, що $\overleftrightarrow{G}(X)$ є замкненою відносно довільних перетинів і об'єднань. Легко перевірити, що довільне об'єднання інваріантних відносно зсувів гіперпросторів включення є інваріантним відносно зсувів, звідки випливає, що $\bigcup_{\alpha\in A}\mathcal{Z}_\alpha\in\overleftrightarrow{G}(X)$ для довільної сім'ї $\{\mathcal{Z}_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset\overleftrightarrow{G}(X)$. Оскільки $\overleftrightarrow{G}(X)$ є замкненою відносно трансверсалі, то ми також одержуємо

$$\bigcap_{\alpha\in A}\mathcal{Z}_\alpha=\Big(\bigcup_{\alpha\in A}\mathcal{Z}_\alpha^\perp\Big)^\perp\in\overleftrightarrow{G}(X)^\perp=\overleftrightarrow{G}(X).$$

Якщо $\overleftrightarrow{G}(X)$ є непорожньою, то вона є лівим ідеалом в $G(X)$, бо складається з правих нулів. Тепер розглянемо довільний правий ідеал I в $G(X)$ і зафіксуємо довільний елемент $\mathcal{R} \in I$. Тоді, для кожного $\mathcal{Z} \in \overset{\leftrightarrow}{G}(X)$ одержуємо, що $\mathcal{Z} = \mathcal{R} \circ \mathcal{Z} \in I$, звідки випливає, що $\overset{\leftrightarrow}{G}(X) \subset I$. $\square$

Твердження 4.4.3. *Якщо X є напівгрупою і $\overset{\leftrightarrow}{G}(X)$ є непорожньою, то $\overset{\leftrightarrow}{G}(X)$ – мінімальний ідеал в $G(X)$.*

Доведення. Згідно з попереднім твердженням, достатньо перевірити, що $\overset{\leftrightarrow}{G}(X)$ є правим ідеалом. Розглянемо довільні гіперпростори включення $\mathcal{A} \in \overset{\leftrightarrow}{G}(X)$ і $\mathcal{B} \in G(X)$ і зафіксуємо довільну множину $F \in \mathcal{A} \circ \mathcal{B}$. Нам потрібно показати, що множини $x * F$ і $x^{-1}F$ належать $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$. Без втрати загальності, ми можемо вважати, що F є базовою, тобто

$$F = \bigcup_{a \in A} a * B_a$$

для деякої множини $A \in \mathcal{A}$ і деякої сім'ї $\{B_a\}_{a \in A} \subset \mathcal{B}$. З асоціативності напівгрупової операції на S випливає, що

$$x * F = \bigcup_{a \in A} x * a * B_a = \bigcup_{z \in x * A} z * B_{a(z)} \in \mathcal{A} \circ \mathcal{B},$$

де $a(z) \in \{a \in A : x * a = z\}$ для $z \in x * A$. Для доведення того, що $x^{-1}F \in \mathcal{A} \circ \mathcal{B}$, відмітимо, що множина $A' = \bigcup_{z \in x^{-1}A} z * B_{xz}$ належить $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ і кожна точка $a' \in A'$ належить множині $z * B_{xz}$ для деякого $z \in x^{-1}A$. Тоді $x * a' \in x * z * B_{xz} \subset F$ і, отже, $\mathcal{A} \ni A' \subset x^{-1}F$, звідки випливає потрібне включення $x^{-1}F \in \mathcal{A} \circ \mathcal{B}$. $\square$

Знайдемо умови на бінарну операцію $* : X \times X \to X$, які гарантують, що множина $\overset{\leftrightarrow}{G}(X)$ є непорожньою. Через $\min GX = \{X\}$ і $\max GX = \{A \subset X : A \neq \emptyset\}$ позначимо мінімальний і максимальний елементи ґратки $G(X)$.

Твердження 4.4.4. *Для магми $(X, *)$ наступні умови є еквівалентними:*

1) $\min GX \in \overset{\leftrightarrow}{G}(X)$;
2) $\max GX \in \overset{\leftrightarrow}{G}(X)$;
3) *для кожних $a, b \in X$ рівняння $a * x = b$ має розв'язок $x \in X$.*

Доведення. (1) $\Rightarrow$ (3) Припустимо, що $\min GX \in \overset{\leftrightarrow}{G}(X)$. Згідно твердження 4.4.1 для кожного $a \in X$ з рівності $\uparrow a \circ \{X\} = \{X\}$ випливає, що для кожного $b \in X$ рівняння $a * x = b$ має розв'язок.

(3) $\Rightarrow$ (1) Якщо для кожних $a, b \in X$ рівняння $a * x = b$ має розв'язок, то $a * X = X$ і, отже, $\mathcal{F} \circ \{X\} = \{X\}$ для всіх $\mathcal{F} \in G(X)$. Звідси випливає, що $\{X\} = \min G(X)$ є правим нулем в $G(X)$ і, отже, належить $\overset{\leftrightarrow}{G}(X)$ згідно з твердженням 4.4.1.

(2) $\Rightarrow$ (3) Припустимо, що $\max G(X) \in \overset{\leftrightarrow}{G}(X)$ і розглянемо довільні елементи $a, b \in X$. Оскільки $\uparrow a \circ \max G(X) = \max G(X) \ni \{b\}$, то існує непорожня множина $X_a \in \max G(X)$ з $a * X_a \subset \{b\}$. Тоді довільний елемент $x \in X_a$ є розв'язком рівняння $a * x = b$.

(3) $\Rightarrow$ (2) Припустимо, що для кожних $a, b \in X$ рівняння $a * x = b$ має розв'язок. Щоб показати рівність $\mathcal{F} \circ \max G(X) = \max G(X)$, достатньо перевірити, що $\max G(X) \subset \mathcal{F} \circ \max G(X)$. Розглянемо довільну множину $B \in \max G(X)$ і довільну множину $F \in \mathcal{F}$. Для кожного $a \in F$ знайдемо такий елемент $x_a \in X$, що $a * x_a \in B$. Тоді множини $\bigcup_{a \in F} a * \{x_a\} \subset B$ належать $\mathcal{F} \circ \max G(X)$, звідки випливає потрібне включення $\max G(X) \subset \mathcal{F} \circ \max G(X)$. $\square$

Аналогічно одержуємо подібний опис нулів мінімального ідеалу напівгрупи $G^\circ(X)$ вільних гіперпросторів включення.

Твердження 4.4.5. *Припустимо, що $(X, *)$ є такою нескінченною магмою, що для кожного $b \in X$ існує така скінченна множина $F \subset X$, що для кожного $a \in X \setminus F$ множина $a^{-1}b = \{x \in X : a * x = b\}$ є скінченною і непорожньою. Тоді*

1) *$G^\circ(X)$ є замкненою підмагмою магми $G(X)$;*

2) *$G^\circ(X)$ є лівим ідеалом $G(X)$, при умові, що для кожних $a, b \in X$ множина $a^{-1}b$ є скінченною;*

3) *множина $\overset{\leftrightarrow}{G}{}^\circ(X) = \overset{\leftrightarrow}{G}(X) \cap G^\circ(X)$ інваріантних вільних гіперпросторів включення є мінімальним ідеалом напівгрупи $G^\circ(X)$;*

4) *множина* $\overset{\leftrightarrow}{G}{}^{\circ}(X)$ *є напівгрупою правих нулів магми* $G(X)$ *і є замкненою повною підґраткою ґратки* $G(X)$*, інваріантною відносно трансверсалі.*

Зауваження 4.4.6. З тверджень 4.4.2 і 5.6.1 випливає, що мінімальні ідеали напівгруп $G(\mathbb{Z})$ і $G^{\circ}(\mathbb{Z})$ є замкненими. На відміну від цього, мінімальні ідеали напівгруп $\beta(\mathbb{Z})$ і $\beta^{\circ}(\mathbb{Z}) = \beta(\mathbb{Z}) \setminus \mathbb{Z}$ не є замкненими, див. [55, § 4.4].

4.5. Центр магми $G(X)$

В цьому підрозділі ми опишемо структуру центра магми $G(X)$ для кожної квазігрупи X.

Теорема 4.5.1. *Нехай* X *– квазігрупа. Якщо гіперпростір включення* $\mathcal{C} \in G(X)$ *комутує з екстремальними елементами* $\max G(X)$ *і* $\min G(X)$ *магми* $G(X)$*, то* $\mathcal{C}$ *є головним ультрафільтром.*

Доведення. Згідно з твердженням 4.4.4, гіперпростори включення $\max G(X)$ і $\min G(X)$ є правими нулями в $G(X)$ і, отже, $\max G(X) \circ \mathcal{C} = \mathcal{C} \circ \max G(X) = \max G(X)$ і $\min G(X) \circ \mathcal{C} = \mathcal{C} \circ \min G(X) = \min G(X)$. Звідси випливає, що для кожного $b \in X$ ми маємо $\{b\} \in \max G(X) = \max G(X) \circ \mathcal{C}$, тобто $a * C \subset \{b\}$ для деякого $C \in \mathcal{C}$ і деякого $a \in X$. Оскільки рівняння $a * y = b$ має єдиний розв'язок $y \in X$, то множина C є одноточковою, тобто $C = \{c\}$. Залишається довести, що $\mathcal{C}$ збігається з головним ультрафільтром $\langle c \rangle$, породженим c. Припустивши протилежне, ми отримуємо, що $X \setminus \{c\} \in \mathcal{C}$. За нашою гіпотезою, рівняння $y * c = c$ має єдиний розв'язок $y_0 \in X$. Оскільки рівняння $y_0 * x = c$ має єдиний розв'язок $x = c$, то $y_0 * (X \setminus \{c\}) \subset X \setminus \{c\}$. Поклавши $C_x = \{c\}$ для всіх $x \in X \setminus \{y_0\}$ і $C_x = X \setminus \{c\}$ для $x = y_0$, ми одержуємо, що $X \setminus \{c\} \supset \bigcup_{x \in X} x * C_x \in \min G(X) \circ \mathcal{C} = \mathcal{C} \circ \min G(X) = \min G(X)$, – протиріччя. □

Теорема 4.5.2. *Для квазігрупи* X *центр магми* $G(X)$ *збігаєтьcя з центром* X*.*

Доведення. Якщо гіперпростір включення $\mathcal{C}$ належить до центру магми $G(X)$, то $\mathcal{C}$ є головним ультрафільтром, породженим деякою точкою $c \in X$. Оскільки $\mathcal{C}$ комутує зі всіма головними ультрафільтрами, то c комутує з всіма елементами X і, отже, c належить до центру X.

Навпаки, якщо $c \in X$ належить до центру квазігрупи X, то для кожного гіперпростору включення $\mathcal{F} \in G(X)$ одержуємо

$$c \circ \mathcal{F} = \{c * F : F \in \mathcal{F}\} = \{F * c : F \in \mathcal{F}\} = \mathcal{F} \circ c,$$

звідки випливає, що (головний ультрафільтр, породжений) c належить до центру магми $G(X)$. $\square$

Зауваження 4.5.3. Цікаво відмітити, що для довільної групи X центр напівгрупи $\beta(X)$ також збігається з центром групи X, див. теорему 6.54 з [55].

4.6. Топологічний центр $G(X)$

В цьому підрозділі ми опишемо топологічний центр магми $G(X)$.

Оскільки всі праві зсуви на $G(X)$ є неперервними, то топологічний центр магми $G(X)$ складається з усіх гіперпросторів включення $\mathcal{F}$ з неперервними лівими зсувами $l_{\mathcal{F}}$.

Нагадаємо, що через $G^{\bullet}(X)$ позначається множина гіперпросторів включення зі скінченними носіями.

Теорема 4.6.1. *Для квазігрупи X топологічний центр магми $G(X)$ збігається з $G^{\bullet}(X)$.*

Доведення. Згідно з твердженням 4.1.6, топологічний центр $\Lambda(GX)$ магми $G(X)$ містить всі головні ультрафільтри і є підґраткою ґратки $G(X)$. Таким чином, $\Lambda(GX)$ містить підґратку $G^{\bullet}(X)$ ґратки $G(X)$, породжену X.

Далі, покажемо, що кожен гіперпростір включення $\mathcal{F} \in \Lambda(GX)$ має скінченний носій і, отже, належить до $G^\bullet(X)$. За теоремою 3.7.1, це буде виконуватися як тільки ми перевіримо, що обидва гіперпростори включення $\mathcal{F}$ і $\mathcal{F}^\perp$ мають бази, які складаються зі скінченних множин.

Розглянемо довільну множину $F \in \mathcal{F}$, оберемо довільну точку $e \in X$, і розглянемо гіперпростір включення $\mathcal{U} = \{U \subset X : e \in F * U\}$. Оскільки для кожного $f \in F$ рівняння $f * u = e$ має розв'язок в X, то ми одержуємо, що $\{e\} \in \mathcal{F} \circ \mathcal{U}$ і за неперервністю лівого зсуву $l_\mathcal{F}$, існує такий відкритий окіл $\mathcal{O}(\mathcal{U})$ елемента $\mathcal{U}$, що $\{e\} \in \mathcal{F} \circ \mathcal{A}$ для всіх $\mathcal{A} \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$. Без втрати загальності можна вважати, що окіл $\mathcal{O}(\mathcal{U})$ є базовим, тобто

$$\mathcal{O}(\mathcal{U}) = U_1^+ \cap \cdots \cap U_n^+ \cap V_1^- \cap \cdots \cap V_m^-$$

для деяких множин $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ і $V_1, \dots, V_m \in \mathcal{U}^\perp$. Розглянемо довільну скінченну множину $A \subset F^{-1}e = \{x \in X : e \in F * x\}$, що перетинає кожну множину U_i, $i \le n$, і розглянемо гіперпростір включення $\mathcal{A} = \langle A \rangle^\perp$. Очевидно, що $\mathcal{A} \in U_1^+ \cap \cdots \cap U_n^+$. Оскільки для кожного елемента $x \in F^{-1}e$ множина $\{x\}$ є елементом гіперпростору включення $\mathcal{U}$ і V_j перетинає кожну множину U сім'ї $\mathcal{U}$, то $x \in V_j$ для кожного $j \le m$. З того, що кожна множина V_j, $j \le m$, містить множину $F^{-1}e \supset A$, ми одержуємо також, що $\mathcal{A} \in V_1^- \cap \cdots \cap V_m^-$. Оскільки $\mathcal{F} \circ \mathcal{A} \ni \{e\}$, то існує така множина $E \in \mathcal{F}$ і сім'я $\{A_x\}_{x \in E} \subset \mathcal{A}$, що $\bigcup_{x \in E} x * A_x \subset \{e\}$. Звідси випливає, що множина $E \subset eA^{-1} = \{x \in X : \exists a \in A \text{ з } xa = e\}$ є скінченною. Ми стверджуємо, що $E \subset F$. Справді, зафіксуємо довільну точку $x \in E$ і знайдемо точку $a \in A$ з $x * a = e$. Оскільки $A \subset F^{-1}e$, то існує точка $y \in F$ з $e = y * a$. Отже, $xa = ya$ і з того, що X є магмою з правими скороченнями випливає, що $x = y \in F$. Таким чином, використовуючи неперервність лівого зсуву $l_\mathcal{F}$, для кожного $F \in \mathcal{F}$ ми знайшли скінченну множину $E \in \mathcal{F}$ з $E \subset F$. Звідси випливає, що $\mathcal{F}$ має базу зі скінченних множин.

З неперервності лівого зсуву $l_\mathcal{F}$ і твердження 4.1.2 випливає неперервність лівого зсуву $l_{\mathcal{F}^\perp}$. Повторюючи попередні аргументи, можна довести, що гіперпростір включення $\mathcal{F}^{\perp}$ теж має базу зі скінченних множин. Насамкінець, використовуючи теорему 3.7.1, одержуємо, що $\mathcal{F} \in G^{\bullet}(X)$. $\square$

4.7. Скоротні зліва елементи магми $G(X)$

В цьому підрозділі ми охарактеризуємо скоротні зліва елементи магми $G(X)$ над квазігрупою X.

Теорема 4.7.1. *Нехай X – квазігрупа. Гіперпростір включення $\mathcal{F} \in G(X)$ є скоротним зліва в магмі $G(X)$ тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{F}$ є головним ультрафільтром.*

Доведення. Припустимо, що $\mathcal{F}$ є скоротним зліва в $G(X)$. Спершу покажемо, що $\mathcal{F}$ містить одноточкову множину. Припустивши протилежне, зафіксуємо довільний елемент $x_0 \in X$ і відмітимо, що $F * (X \setminus \{x_0\}) = X$ для кожного $F \in \mathcal{F}$. Щоб довести, що ця рівність виконується, зафіксуємо довільний елемент $a \in X$, оберемо два різних елементи $b, c \in F$ і знайдемо розв'язки $x, y \in X$ рівнянь $b * x = a$ і $c * y = a$. Оскільки X з правими скороченнями, то $x \neq y$. Таким чином, один з елементів x чи y не дорівнює x_0. Якщо $x \neq x_0$, то $a = b * x \in F * (X \setminus \{x_0\})$. Якщо $y \neq x_0$, то $a = c * y \in F * (X \setminus \{x_0\})$. Далі, для гіперпростору включення $\mathcal{U} = \langle X \setminus \{x_0\} \rangle \neq \min G(X)$, одержуємо $\mathcal{F} \circ \mathcal{U} = \min G(X) = \mathcal{F} \circ \min G(X)$, що суперечить вибору $\mathcal{F}$ як скоротного зліва елемента магми $G(X)$.

Отже, $\mathcal{F}$ містить деяку одноточкову множину $\{c\}$. Ми стверджуємо, що $\mathcal{F}$ збігається з головним ультрафільтром, породженим c. Припустивши протилежне, отримуємо $X \setminus \{c\} \in \mathcal{F}$. Нехай $\mathcal{A} = \langle X \setminus \{c\} \rangle^{\perp}$ – гіперпростір включення, який складається з підмножин, що перетинають $X \setminus \{c\}$. Очевидно, що $\mathcal{A} \neq \max G(X)$. Ми стверджуємо, що $\mathcal{F} \circ \mathcal{A} = \max G(X) = \mathcal{F} \circ \max G(X)$, що суперечить скоротності зліва $\mathcal{F}$. Справді, зафіксувавши довільну одноточкову множину $\{a\} \in \max G(X)$, розглянемо два випадки: якщо $a \neq c * c$, то ми можемо знайти єдиний $x \in X$ з $c * x = a$. Оскільки $x \neq c$, то $\{x\} \in \mathcal{A}$ і, отже,

$\{a\} = c * \{x\} \in \mathcal{F} \circ \mathcal{A}$. Якщо $a = c * c$, то для кожного $y \in X \setminus \{c\}$ знайдемо $a_y \in X$ з $y * a_y = a$ і використовуємо скоротність зліва в X, щоб одержати, що $a_y \neq c$ і, отже, $\{a_y\} \in \mathcal{A}$. Тоді $\{a\} = \bigcup_{y \in X \setminus \{c\}} y * \{a_y\} \in \mathcal{F} \circ \mathcal{A}$.

Таким чином, $\mathcal{F} = \langle c \rangle$ є головним ультрафільтром, що доводить необхідність. Щоб довести достатність, розглянемо довільний головний ультрафільтр $\langle x \rangle$, породжений елементом $x \in X$. Ми стверджуємо, що два гіперпростори включення $\mathcal{F}, \mathcal{U} \in G(X)$ є рівними за умови, що $\langle x \rangle \circ \mathcal{F} = \langle x \rangle \circ \mathcal{U}$. Справді, розглянемо довільну множину $F \in \mathcal{F}$ і відмітимо, що $x * F \in \langle x \rangle \circ \mathcal{F} = \langle x \rangle \circ \mathcal{U}$ і, отже, $x * F = x * U$ для деякого $U \in \mathcal{U}$. З скоротності зліва в X випливає, що $F = U \in \mathcal{U}$, звідки $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$. Тими ж міркуваннями перевіряємо включення $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}$. □

Зауваження 4.7.2. З теореми 4.7.1 випливає, що для зліченної абелевої групи X множина скоротних зліва елементів в $G(X)$ збігається з X. З іншого боку, множина скоротних (зліва) елементів $\beta(X)$ містить відкриту всюди щільну підмножину напівгрупи $\beta^\circ(X)$, див. теорему 8.34 з [55].

4.8. Скоротні справа елементи $G(X)$

Як ми бачили в попередньому підрозділі, для довільної квазігрупи X магма $G(X)$ містить тільки тривіальні скоротні зліва елементи. Для скоротних справа елементів ситуація набагато цікавіша. Спершу доведемо необхідну умову правої скоротності.

Твердження 4.8.1. *Нехай X є магмою. Якщо гіперпростір включення $\mathcal{F} \in G(X)$ є скоротним справа в $G(X)$, то індексована множина $\{x\,\mathcal{F} : x \in X\}$ є дискретною в $G(X)$, в тому розумінні, що кожен елемент $x\mathcal{F}$ має окіл $O(x\mathcal{F})$, що не містить інших елементів $y\mathcal{F}$, де $y \in X \setminus \{x\}$.*

Доведення. Скоротність справа елемента $\mathcal{F} \in G(X)$ рівносильна ін'єктивності правого зсуву $r_{\mathcal{F}} : G(X) \to G(X)$. Оскільки $G(X)$ містить $\beta(X)$, то звуження $r_{\mathcal{F}}|\beta(X) : \beta(X) \to G(X)$ є топологічним вкладенням. Оскільки простір $X \subset \beta(X)$ дискретний, то образ $r_{\mathcal{F}}(X) = \{x\mathcal{F} : x \in X\}$ теж є дискретним. $\square$

Далі, ми дамо достатні умови скоротності справа.

Твердження 4.8.2. *Нехай X є магмою. Гіперпростір включення $\mathcal{F} \in G(X)$ є скоротним справа в $G(X)$, за умови, що існує така сім'я множин $\{S_x\}_{x\in X} \subset \mathcal{F} \cap \mathcal{F}^{\perp}$, що $xS_x \cap yS_y = \emptyset$ для довільних різних елементів $x, y \in X$.*

Доведення. Припустимо, що $\mathcal{A} \circ \mathcal{F} = \mathcal{B} \circ \mathcal{F}$ для двох гіперпросторів включення $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in G(X)$. Спершу покажемо, що $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. Розглянемо довільну множину $A \in \mathcal{A}$ і відмітимо, що множина $\bigcup_{a\in A} aS_a$ належить до $\mathcal{A} \circ \mathcal{F} = \mathcal{B} \circ \mathcal{F}$. Таким чином, існує така множина $B \in \mathcal{B}$ і сім'я множин $\{F_b\}_{b\in B} \subset \mathcal{F}$, що

$$\bigcup_{b\in B} bF_b \subset \bigcup_{a\in A} aS_a.$$

З $S_b \in \mathcal{F}^{\perp}$ випливає, що $F_b \cap S_b$ є непорожньою для кожного $b \in B$.

Оскільки множини aS_a і bS_b є неперетинними для різних $a, b \in X$, то з включення

$$\bigcup_{b\in B} b(F_b \cap S_b) \subset \bigcup_{b\in B} bF_b \subset \bigcup_{a\in A} aS_a$$

випливає, що $B \subset A$ і, отже, $A \in \mathcal{B}$.

Аналогічно можна довести, що $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. $\square$

З тверджень 4.8.1 і 4.8.2 випливає наступна характеризація скоротних справа ультрафільтрів в $G(X)$, що узагальнює відому характеризацію скоротних справа елементів напівгрупи $\beta(X)$, див. [55, теор. 8.11].

Наслідок 4.8.3. *Нехай X є зліченною магмою. Для ультрафільтра $\mathcal{U}$ на X наступні умови є рівносильними:*

1) *$\mathcal{U}$ є скоротним справа в $G(X)$;*

2) *$\mathcal{U}$ є скоротним справа в $\beta(X)$;*

3) *індексована множина $\{x\mathcal{U} : x \in X\}$ є дискретною в $\beta(X)$;*

4) *існує така індексована сім'я множин $\{U_x\}_{x\in X} \subset \mathcal{U}$, що для довільних різних $x, y \in X$ зсуви $x\,U_x$ і $y\,U_y$ є неперетинними.*

Цю характеризацію можна використати, щоб показати, що для довільної зліченної групи X напівгрупа $\beta^\circ(X)$ вільних ультрафільтрів містить відкриту всюди щільну підмножину скоротних справа ультрафільтрів, див. [55, теор. 8.10]. Виявляється, що схожий результат можна довести для напівгрупи $G^\circ(X)$.

Твердження 4.8.4. *Для довільної зліченної квазігрупи X, магма $G^\circ(X)$ містить відкриту всюди щільну підмножину скоротних справа вільних гіперпросторів включення.*

Доведення. Нехай $X = \{x_n : n \in \omega\}$ – ін'єктивна нумерація зліченної квазігрупи X. Розглянемо вільний гіперпростір включення $\mathcal{F} \in G^\circ(X)$ і його окіл $O(\mathcal{F})$ в $G^\circ(X)$. Нам потрібно знайти непорожню відкриту множину скоротних справа вільних гіперпросторів включення в $O(\mathcal{F})$. Без обмеження загальності вважаємо, що окіл $O(\mathcal{F})$ є базовим, тобто

$$O(\mathcal{F}) = G^\circ(X) \cap U_0^+ \cap \dots \cap U_n^+ \cap U_{n+1}^- \cap \dots \cap U_{m-1}^-$$

для деяких множин $U_1, \dots, U_{m-1}$. Ці множини є нескінченними, бо $\mathcal{F}$ – вільний. Ми збираємося побудувати таку нескінченну множину $C = \{c_n : n \in \omega\} \subset X$, що має нескінченний перетин з множинами U_i, $i < m$, і для довільних різних $x, y \in X$ перетин $xC \cap yC$ є скінченним. Елементи c_k, $k \in \omega$, з яких складається множина C обиратимемо за індукцією так, щоб виконувалися наступні умови:

- $c_k \in U_j$, де $j = k \mod m$;
- c_k не належить скінченній множині

$$F_k = \{z \in X : \exists i, j \le k\ \exists l < k\ \ (x_i z = x_j c_l)\}.$$

Очевидно, що побудована таким чином множина $C = \{c_k : k \in \omega\}$ має нескінченний перетин з кожною множиною U_i, $i < m$. Оскільки X з правими скороченнями, то для довільного $i < j$ множина $Z_{i,j} = \{z \in X : x_i z = x_j z\}$ є скінченною. З вибору елементів c_k для $k > j$ випливає, що $x_i C \cap x_j C \subset x_i(Z_{i,j} \cup \{c_l : l \le j\})$ є скінченною.

Далі, нехай $\mathcal{C}$ – вільний гіперпростір включення на X, породжений множинами C і $U_0, \dots, U_n$. Очевидно, що $\mathcal{C} \in O(\mathcal{F})$ і $C \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}^\perp$. Розглянемо відкритий окіл

$$O(\mathcal{C}) = O(\mathcal{F}) \cap C^+ \cap (C^+)^\perp$$

гіперпростору включення $\mathcal{C}$ в $G^\circ(X)$.

Ми стверджуємо, що кожен гіперпростір включення $\mathcal{A} \in O(\mathcal{C})$ є скоротним справа в $G(X)$. Це буде випливати з твердження 4.8.2 як тільки ми побудуємо таку сім'ю множин $\{A_i\}_{i\in\omega} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{A}^\perp$, що $x_iA_i \cap x_jA_j = \emptyset$ для довільних чисел $i < j$. Множини A_i, $i \in \omega$, можна визначити за формулою $A_k = C \setminus F_k$, де

$$F_k = \{c \in C : \exists i < k \text{ таке, що } x_k c = x_i C\}$$

є скінченною згідно вибору множини C. $\square$

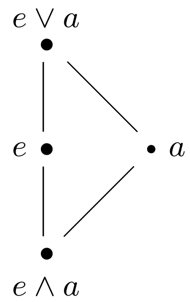
4.9. Структура напівгруп $G(H)$ над скінченними групами H

В підрозділі 5.10 ми побачимо, що структурні властивості скінченних напівгруп $\lambda(C_n)$ мають нетривіальні застосування для нескінченних об'єктів $\lambda^\circ(\mathbb{Z})$ і $\lambda(\mathbb{Z})$. Це спостереження є мотивацією для більш детального вивчення просторів $G(H)$ над скінченими абелевими групами H.

Виявляється, що напівгрупа $G(C_n)$ є розщеплюваною для $n \leq 3$ і не є розщеплюваною для $n = 5$ (останнє випливає з нерозщеплюваності напівгрупи $\lambda(C_5)$, що доведено в підрозділі 5.11). Отже, далі ми опишемо структуру напівгруп $G(C_n)$ і їх трансверсальних напівгруп $T(C_n)$ для $n \leq 3$.

Для групи X ототожнюємо елементи $x \in X$ з ультрафільтрами, що їх породжують. Також ми вживаємо символи $\wedge$ та $\vee$ для позначення ґраткових операцій $\cap$ та $\cup$ на $G(X)$.

Напівгрупа $G(C_2)$. Для циклічної групи $C_2 = \{e, a\}$ ґратка $G(C_2)$ містить чотири гіперпростори включення: $e, a, e \wedge a, e \vee a$, і показана на рисунку:



Напівгрупа $G(C_2)$ має єдину C_2-трансверсальну напівгрупу

$$T(C_2) = \{e \wedge a, e, e \vee a\}$$

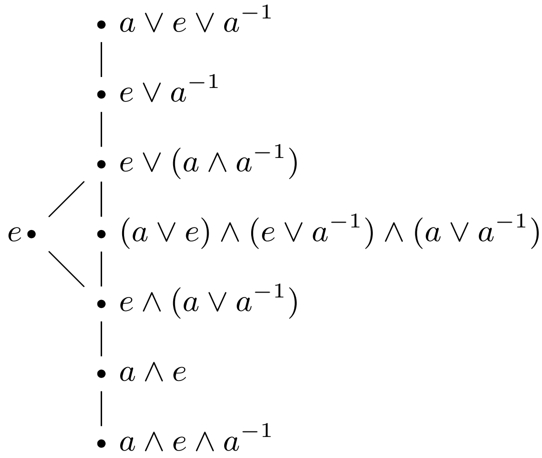
з двома правими нулями: $e \wedge a$, $e \vee a$ і однією одиницею e. Ця напівгрупа є кліфордовою (і, отже, регулярною), але не є інверсною (бо містить некомутуючі ідемпотенти).

Напівгрупа $G(C_3)$ над циклічною групою $C_3 = \{e, a, a^{-1}\}$ містить 18 елементів:

$$a \vee e \vee a^{-1},$$
$$a \vee a^{-1},\ \ a \vee e,\ \ e \vee a^{-1},$$
$$a \vee (e \wedge a^{-1}),\ \ e \vee (a \wedge a^{-1}),\ \ a^{-1} \vee (a \wedge e),$$
$$a, e, a^{-1},$$
$$(a \vee e) \wedge (a \vee a^{-1}) \wedge (e \vee a^{-1}),$$
$$a \wedge (e \vee a^{-1}),\ \ e \wedge (a \vee a^{-1}),\ \ a^{-1} \wedge (a \vee e),$$
$$a \wedge a^{-1},\ \ a \wedge e,\ \ e \wedge a^{-1},$$
$$a \wedge e \wedge a^{-1}$$

розділених на 8 орбіт по відношенню до дії групи C_3.

Напівгрупа $G(C_3)$ має 9 різних C_3-трансверсальних напівгруп, одна з яких подана на рисунку:



$T(C_3)$

Напівгрупа $G(C_3)$ містить три інваріантні гіперпростори включення, які є правими нулями: $a \wedge e \wedge a^{-1}$, $a \vee e \vee a^{-1}$ і $(a \vee e) \wedge (e \vee a^{-1}) \wedge (a \vee a^{-1})$. Крім правих нулів $G(C_3)$ містить три ідемпотенти: e, $e \vee (a \wedge a^{-1})$ і $e \wedge (a \vee a^{-1})$. Елемент e є одиницею напівгрупи $G(C_3)$.

Повну інформацію про структуру C_3-трансверсальної напівгрупи $T(C_3)$ (яка ізоморфна до фактор-напівгрупи $G(C_3)/C_3$) можна одержати з таблиці Келі

Таблиця 4.1

Таблиця Келі множення елементів напівгрупи $T(C_3) \setminus \{e\}$

$\circ$	x_{-3}	x_{-2}	x_{-1}	x_0	x_1	x_2	x_3
x_{-3}	x_{-3}	x_{-3}	x_{-3}	x_0	x_0	x_0	x_3
x_{-2}	x_{-3}	x_{-3}	x_{-2}	x_0	x_0	x_1	x_3
x_{-1}	x_{-3}	x_{-3}	x_{-1}	x_0	x_0	x_2	x_3
x_0	x_{-3}	x_{-3}	x_0	x_0	x_0	x_3	x_3
x_1	x_{-3}	x_{-2}	x_0	x_0	x_1	x_3	x_3
x_2	x_{-3}	x_{-1}	x_0	x_0	x_2	x_3	x_3
x_3	x_{-3}	x_0	x_0	x_0	x_3	x_3	x_3

її лінійно впорядкованої піднапівгрупи $T(C_3) \setminus \{e\}$, що містить 7 елементів:

$$\begin{aligned} x_{-3} &= e \wedge a \wedge a^{-1}, \\ x_{-2} &= e \wedge a, \\ x_{-1} &= e \wedge (a \vee a^{-1}), \\ x_0 &= (e \vee a) \wedge (e \vee a^{-1}) \wedge (a \vee a^{-1}), \\ x_1 &= e \vee (a \wedge a^{-1}), \\ x_2 &= e \vee a, \\ x_3 &= e \vee a \vee a^{-1}. \end{aligned}$$

Зауваження 4.9.1. Досліджуючи таблицю Келі, можна побачити, що напівгрупа $G(C_3)$ є регулярною, але не є кліфордовою (бо елемент x_2 не груповий) і не є інверсною (оскільки містить некомутуючі ідемпотенти).

Більше того, в підрозділі 5.11 ми побачимо, що напівгрупа $G(C_5)$ не є регулярною.

Висновки до розділу 4

В четвертому розділі ми вивчили деякі важливі властивості напівгрупової операції на $G(S)$ і їх взаємозв'язок з ґратковою структурою $G(S)$. Показано, що асоціативна бінарна операція, визначена на дискретному просторі S, продовжується не тільки на $\beta(S)$, але також і на найменшу повну підґратку $G(S) \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(S))$, породжену множиною $\beta(S)$. Наділений продовженою операцією, простір гіперпросторів включення $G(S)$ стає суперкомпактною правотопологічною напівгрупою, що містить $\beta(S)$ як замкнену піднапівгрупу. Крім $\beta(S)$, напівгрупа $G(S)$ містить багато інших важливих підпросторів як замкнені піднапівгрупи: суперрозширення $\lambda(S)$ простору S, простір $N_k(S)$ k-зчеплених гіперпросторів включення, простір $\mathrm{Fil}(S)$ фільтрів на S (який містить ізоморфну копію степінь-напівгрупи $\Gamma(S)$ напівгрупи S), і т.д. Ми описали алгебраїчну та алгебро-топологічну структуру одержаних напівгруп $G(S)$. Зокрема доведено, що гіперпростір включення $\mathcal{A} \in G(S)$ є правим нулем в $G(S)$ тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{A}$ є інваріантним в $G(S)$. Описано мінімальний ідеал напівгрупи $G(S)$. Показано, що множина $\overset{\leftrightarrow}{G}(S)$ всіх інваріантних гіперпросторів включення є замкненою в $G(S)$, є напівгрупою правих нулів напівгрупи $G(S)$ і повною підґраткою ґратки $G(S)$, яка інваріантна відносно трансверсалі. Більше того, якщо $\overset{\leftrightarrow}{G}(S)$ є непорожньою, то вона є мінімальним ідеалом в $G(S)$. Множина $\overset{\leftrightarrow}{G}(S)$ є непорожньою, якщо для кожних $a, b \in S$ рівняння $a * x = b$ має розв'язок $x \in S$.

В цьому розділі описано також (топологічні) центри напівгруп $G(S)$. Зокрема доведено, що для групи S центр напівгрупи $G(S)$ збігається з центром S. Цікаво відмітити, що для довільної групи S центр напівгрупи $\beta(S)$ також збігається з центром групи S, див. теорему 6.54 з [55]. Для групи S топологічний центр напівгрупи $G(S)$ збігається з множиною $G^\bullet(S)$ всіх гіперпросторів включення зі скінченними носіями.

Важливими результатами даного розділу є повне описанння скоротних зліва елементів напівгруп $G(S)$, а також виявлення нетривіальних скоротних справа елементів. Зокрема, для групи S отримано наступні результати. Гіперпростір включення $\mathcal{F} \in G(S)$ є скоротним зліва в напівгрупі $G(S)$ тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{F}$ є головним ультрафільтром. З іншого боку, множина скоротних (зліва) елементів $\beta(S)$ містить відкриту всюди щільну підмножину напівгрупи $\beta^\circ(S)$ вільних ультрафільтрів, див. теорему 8.34 з [55]. Гіперпростір включення $\mathcal{F} \in G(S)$ є скоротним справа в $G(S)$, за умови, що існує така сім'я множин $\{S_x\}_{x\in S} \subset \mathcal{F} \cap \mathcal{F}^\perp$, що $xS_x \cap yS_y = \emptyset$ для довільних різних елементів $x, y \in S$. Із цього результату в наслідку 4.8.3 ми виводимо характеризацію скоротних справа ультрафільтрів в $G(S)$, що узагальнює відому характеризацію скоротних справа елементів напівгрупи $\beta(S)$, див. [55, теор. 8.11], із якої випливає, що для довільної зліченної групи S напівгрупа $\beta^\circ(S)$ вільних ультрафільтрів містить відкриту всюди щільну підмножину скоротних справа ультрафільтрів, див. [55, теор. 8.10]. Виявляється, що схожий результат справедливий також і для напівгрупи $G^\circ(S)$: для довільної зліченної групи S, напівгрупа $G^\circ(S)$ містить відкриту всюди щільну підмножину скоротних справа вільних гіперпросторів включення.

РОЗДІЛ 5
АЛГЕБРА В СУПЕРРОЗШИРЕННЯХ ГРУП

П'ятий розділ присвячений вивченню структури напівгруп $\lambda(G)$ максимальних зчеплених систем на групах G.

5.1. Самозачеплені множини в групах

У цьому підрозділі ми вивчаємо самозачеплені множини в групах. За означенням, підмножина A групи G називається *самозачепленою*, якщо $A \cap xA \neq \emptyset$ для кожного елемента $x \in G$. Це поняття можна визначити в більш загальному контексті G-просторів.

Підмножина $A \subset X$ G-простору X називається *самозачепленою*, якщо $A \cap gA \neq \emptyset$ для всіх $g \in G$. Легко бачити, що підмножина $A \subset G$ групи G є самозачепленою тоді і тільки тоді, коли $AA^{-1} = G$.

Для G-простору X через $sl(X)$ позначимо найменшу потужність $|A|$ самозачепленої підмножини $A \subset X$. Деякі нижні і верхні оцінки для $sl(G)$ одержуємо в наступному твердженні.

Для дійсного числа x покладемо

$$\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} : n \geq x\} \text{ і } \lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}.$$

Твердження 5.1.1. *Нехай G – скінченна група і H є підгрупою групи G. Тоді*

1) $sl(G) \geq (1 + \sqrt{4|G| - 3})/2$;
2) $sl(G) \leq sl(H) \cdot sl(G/H) \leq sl(H) \cdot \lceil (|G/H| + 1)/2 \rceil$.
3) $sl(G) < |H| + |G/H|$.

Доведення. 1. Зафіксуємо довільну самозачеплену множину $A \subset G$ потужності $|A| = sl(G)$ і розглянемо сюр'єктивне відображення $f : A \times A \to G$, $f : (x, y) \mapsto xy^{-1}$. Оскільки $f(x, y) = xy^{-1} = e$ для всіх $(x, y) \in \Delta_A = \{(x, y) \in A^2 :$

$x = y\}$, то ми одержуємо, що $|G| = |G \setminus \{e\}| + 1 \leq |A^2 \setminus \Delta_A| + 1 = sl(G)^2 - sl(G) + 1$, звідки і випливає нерівність $sl(G) \geq (1 + \sqrt{4|G| - 3})/2$.

2a. Нехай H є підгрупою групи G. Розглянемо самозачеплені множини $A \subset H$ і $\mathcal{B} \subset G/H = \{xH : x \in G\}$ потужностей $|A| = sl(H)$ і $|\mathcal{B}| = sl(G/H)$. Зафіксуємо таку довільну підмножину $B \subset G$, що $|B| = |\mathcal{B}|$ і $\{xH : x \in B\} = \mathcal{B}$. Ми стверджуємо, що множина $C = BA$ є самозачепленою. Зафіксувавши довільний $x \in G$ доведемо, що перетин $C \cap xC$ є непорожнім. Оскільки $\mathcal{B}$ є самозачепленою, то перетин $\mathcal{B} \cap x\mathcal{B}$ містить множину $bH = xb'H$ для деяких $b, b' \in B$. Звідси випливає, що $b^{-1}xb' \in H = AA^{-1}$. Остання рівність випливає з того факту, що множина $A \subset H$ є самозачепленою в H. Таким чином, $b^{-1}xb' = a'a^{-1}$ для деяких $a, a' \in A$. Тоді $xC \ni xb'a = ba' \in C$ і, отже, $C \cap xC \neq \emptyset$. З самозачепленості C випливає шукана верхня оцінка

$$sl(G) \leq |C| \leq |A| \cdot |B| = sl(H) \cdot sl(G/H).$$

2b. Далі, ми покажемо, що $sl(G/H) \leq \lceil (|G/H| + 1)/2 \rceil$. Розглянемо довільну множину $A \subset G/H$ потужності $|A| = \lceil (|G/H| + 1)/2 \rceil$ і відмітимо, що $|A| > |G/H|/2$. Тоді для кожного $x \in G$ зсув xA має потужність $|xA| = |A| > |G/H|/2$. Оскільки $|A| + |xA| > |G/H|$, то множини A і xA перетинаються. Таким чином, A є самозачепленою і $sl(G/H) \leq |A| = \lceil (|G/H| + 1)/2 \rceil$.

3. Оберемо таку підмножину $B \subset G$ потужності $|B| = |G/H|$, що $BH = G$ і відмітимо, що множина $A = H \cup B$ є самозачепленою і має потужність $|A| \leq |H| + |B| - 1$ (оскільки $B \cap H$ є одноточковим). □

Теорема 5.1.2. *Для скінченної групи G*

(i) $sl(G) = \lceil (|G| + 1)/2 \rceil > |G|/2$ *тоді і тільки тоді, коли G є ізоморфною до однієї з груп: C_1, C_2, C_3, C_4, $C_2 \times C_2$, C_5, D_6, $(C_2)^3$;*

(ii) $sl(G) = |G|/2$ *тоді і тільки тоді, коли G є ізоморфною до однієї з груп: C_6, C_8, $C_4 \times C_2$, D_8, Q_8.*

Доведення. І. Спершу доведемо нерівність $sl(G) < |G|/2$ для всіх груп G, не ізоморфних до груп, які згадуються в пунктах (i), (ii). Зафіксувавши таку групу G, нам слід знайти таку самозачеплену підмножину $A \subset G$, що $|A| < |G|/2$.

Розглянемо 9 випадків.

1) G містить підгрупу H порядку $|H| = 3$ і індексу $|G/H| = 3$. Тоді $sl(H) = 2$ і ми, використовуючи твердження 5.1.1(2), одержуємо нерівності

$$sl(G) \le sl(H) \cdot sl(G/H) \le 2 \cdot 2 < 9/2 = |G|/2.$$

2) $|G| \notin \{9, 12, 15\}$ і G містить підгрупу H порядку $n = |H| \ge 3$ і індексу $m = |G/H| \ge 3$. В цьому випадку $n + m - 1 < nm/2$ і $sl(G) \le |H| + |G/H| - 1 = n + m - 1 < nm/2$ за твердженням 5.1.1(3).

3) G є циклічною порядку $n = |G| \ge 9$. Зафіксувавши твірний елемент a групи G, побудуємо послідовність $(x_i)_{2 \le i \le n/2}$, поклавши $x_2 = a^0$, $x_3 = a$, $x_4 = a^3$, $x_5 = a^5$, і $x_i = x_{i-1}a^i$ для $5 < i \le n/2$. Тоді множина $A = \{x_i : 2 \le i \le n/2\}$ має потужність $|A| < n/2$ і є самозачепленою.

4) G є циклічною порядку $|G| = 7$. Зафіксувавши твірний елемент a групи G відмітимо, що $A = \{e, a, a^3\}$ є 3-елементною самозачепленою підмножиною і, отже, $sl(G) \le 3 < |G|/2$.

5) G містить циклічну підгрупу $H \subset G$ простого порядку $|H| \ge 7$. За двома попередніми пунктами, $sl(H) < |H|/2$ і, отже, $sl(G) \le sl(H) \cdot sl(G/H) < \frac{|H|}{2} \cdot \frac{|G|}{|H|} = |G|/2$.

6) $|G| > 6$ і $|G| \notin \{8, 10, 12\}$. Якщо $|G|$ є простим або $|G| = 15$, то G є циклічною порядку $|G| \ge 7$ і, отже, $sl(G) < |G|/2$ за пунктами (3), (4). Якщо $|G| = 2p$ для деякого простого числа p, то G містить циклічну підгрупу порядку $p \ge 7$ і, таким чином, $sl(G) < |G|/2$ згідно пункту (5). Якщо $|G| = 4n$ для деякого $n \ge 4$, то за теоремою Силова (див. [15, ст. 74]), G містить підгрупу $H \subset G$ порядку $|H| = 4$ і індексу $|G/H| \ge 4$. Тоді $sl(G) < |G|/2$ згідно пункту (2). Якщо вищезгадані умови не виконуються, то $|G| = nm \ne 15$ для деяких

непарних чисел $n, m \geq 3$ і, використовуючи пункти (1) і (2), робимо висновок, що $sl(G) < |G|/2$.

7) Якщо $|G| = 8$, то G є ізоморфною до однієї з груп: C_8, $C_2 \times C_4$, $(C_2)^3$, D_8, Q_8. Всі ці групи згадуються в пунктах (i), (ii) і, отже, виключаються з нашого розгляду.

8) Якщо $|G| = 10$, то G є ізоморфною до C_{10} або D_{10}. Якщо G ізоморфна до C_{10}, то $sl(G) < |G|/2$ згідно з пунктом (3). Якщо G ізоморфна до D_{10}, то G містить такий елемент a порядку 5 і елемент b порядку 2, що $bab^{-1} = a^{-1}$. Легко перевірити, що 4-елементна множина $A = \{e, a, b, ba^2\}$ є самозачепленою і, отже, $sl(G) \leq 4 < |G|/2$.

9) В цьому пункті розглядатимемо групи G порядку $|G| = 12$. Відомо[1], що з точністю до ізоморфізму існує 5 груп порядку 12: циклічна група C_{12}, пряма сума двох циклічних груп $C_6 \oplus C_2$, діедральна група D_{12}, знакозмінна група A_4, і напівпрямий добуток $C_3 \rtimes C_4$, тобто група виду $\langle a, b \mid a^4 = b^3 = 1, aba^{-1} = b^{-1} \rangle$.

Якщо G є ізоморфною до C_{12}, $C_6 \oplus C_2$ чи A_4, то G містить нормальну 4-елементну підгрупу H. За теоремами Силова, G містить також елемент a порядку 3. Взявши до уваги, що $a^2 \notin H$ і $Ha^{-1} = a^{-1}H$, робимо висновок, що 5-елементна множина $A = \{a\} \cup H$ є самозачепленою і, отже, $sl(G) \leq 5 < |G|/2$.

Якщо G ізоморфна до $C_3 \rtimes C_4$, то G містить нормальну підгрупу H порядку 3 і такий елемент $a \in G$, що $a^2 \notin H$. Відмітимо, що 5-елементна множина $A = H \cup \{a, a^2\}$ є самозачепленою. Справді, $AA^{-1} \supset H \cup aH \cup a^2H \cup Ha^{-1} = G$. Таким чином, $sl(G) \leq 5 < |G|/2$.

Насамкінець, розглянемо випадок діедральної групи D_{12}. Вона містить елемент a, що породжує циклічну підгрупу порядку 6 і такий елемент b порядку 2, що $bab^{-1} = a^{-1}$. Розглянемо 5-елементну множину $A = \{e, a, a^3, b, ba\}$ і відмітимо, що $AA^{-1} = \{e, a, a^3, b, ba\} \cdot \{e, a^5, a^3, b, ba\} = G$. Звідси і випливає шукана нерівність $sl(G) \leq 5 < 6 = |G|/2$.

[1]Див. сайт http://mathworld.wolfram.com/FiniteGroup.html

Таким чином, ми закінчили доведення нерівності $sl(G) < |G|/2$ для всіх груп, що не розглядаються в пунктах (i),(ii) теореми.

II. Далі, доведемо пункт (i).

З нижньої оцінки в твердженні 5.1.1(1) випливає, що $sl(G) = \lceil (|G| + 1)/2 \rceil > |G|/2$ для всіх груп G порядку $|G| \le 5$.

Залишається перевірити, що $sl(G) > |G|/2$, якщо G ізоморфна до D_6 або $(C_2)^3$. Спершу розглянемо випадок $G = D_6$. В цьому випадку G містить нормальну 3-елементну підгрупу T. Припустивши, що $sl(G) \le |G|/2 = 3$, знайдемо самозачеплену 3-елементну підмножину A. Без втрати загальності, можемо вважати, що нейтральний елемент e групи G належить до A (в іншому випадку замінюємо A потрібним зсувом xA). Взявши до уваги, що $AA^{-1} = G$, одержуємо, що $A \not\subset T$ і, отже, ми можемо знайти елемент $a \in A \setminus T$. Цей елемент має порядок 2. Третій елемент множини A позначимо через b. Тоді

$$AA^{-1} = \{e, a, b\} \cdot \{e, a, b^{-1}\} = \{e, a, b, a, e, ba, b^{-1}, ba, e\} \neq G,$$

що є суперечністю.

Припустимо тепер, що G ізоморфна до $(C_2)^3$. В цьому випадку G є 3-вимірним лінійним простором над полем C_2. Припустивши, що $sl(A) \le 4 = |G|/2$, знайдемо 4-елементну самозачеплену множину $A \subset G$. Замінюючи A потрібним зсувом, ми можемо вважати, що A містить нейтральний елемент e групи G. Оскільки $AA^{-1} = G$, то множина A містить три лінійно незалежні точки a, b, c. Тоді

$$AA^{-1} = \{e, a, b, c\} \cdot \{e, a, b, c\} = \{e, a, b, c, ab, ac, bc\} \neq G,$$

що суперечить вибору множини A.

III. Насамкінець, доведемо рівність $sl(G) = |G|/2$ для груп, що згадуються в пункті (ii).

Якщо $G = C_6$, то згідно з твердженням 5.1.1(1) $sl(G) \ge 3$. З другого боку, ми можемо перевірити, що для довільного твірного елемента a групи G

3-елементна підмножина $A = \{e, a, a^3\}$ є самозачепленою в G, звідки і випливає, що $sl(G) = 3 = |G|/2$.

Якщо $|G| = 8$, то $sl(G) \geq 4$ згідно з твердженням 5.1.1(1).

Якщо G є циклічною порядку 8 і a є твірним елементом G, то множина $A = \{e, a, a^3, a^4\}$ є самозачепленою і, отже, $sl(C_8) = 4$.

Якщо G ізоморфна до $C_4 \oplus C_2$, то G містить два комутуючі твірні елементи a, b, причому $a^4 = b^2 = 1$. Легко перевірити, що множина $A = \{e, a, a^2, b\}$ є самозачепленою і, отже, $sl(C_4 \oplus C_2) = 4$.

Якщо G ізоморфна до діедральної групи D_8, то G породжується двома елементами a, b, що зв'язані співвідношеннями $a^4 = b^2 = 1$ і $bab^{-1} = a^{-1}$. Легко перевірити, що 4-елементна множина $A = \{e, a, b, ba^2\}$ є самозачепленою.

Якщо G ізоморфна до групи кватерніонів $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$, то кожен може перевірити, що 4-елементна множина $A = \{-1, 1, i, j\}$ є самозачепленою і, отже, $sl(Q_8) = 4$. $\square$

Наступне твердження доповнює теорему 5.1.2 обчисленням значення $sl(G)$ для всіх груп G потужності $|G| \leq 13$.

Твердження 5.1.3. *Число $sl(G)$ для груп G потужності $|G| \leq 13$ можна знайти з таблиці:*

G	C_2	C_3	C_5	C_4	$C_2 \oplus C_2$	C_6	D_6	C_8	$C_2 \oplus C_4$	D_8	Q_8	C_2^3
$sl(G)$	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	5
G	C_7	C_{11}	C_{13}	C_9	$C_3 \oplus C_3$	C_{10}	D_{10}	C_{12}	$C_2 \oplus C_6$	D_{12}	A_4	$C_3 \rtimes C_4$
$sl(G)$	3	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5

Доведення. Для груп G порядку $|G| \leq 10$ значення $sl(G)$ однозначно визначається з допомогою нижньої оцінки $sl(G) \geq \frac{1+\sqrt{4|G|-3}}{2}$ з твердження 5.1.1(1) і верхньої оцінки з теореми 5.1.2. Залишається розглянути групи G порядку $11 \leq |G| \leq 13$.

1. Якщо G є циклічною порядку 11 або 13, то розглянувши твірний елемент a групи G, легко перевірити, що 4-елементна множина $A = \{e, a^4, a^5, a^7\}$ є самозачепленою, звідки і випливає, що $sl(G) = 4$.

2. Якщо G є циклічною порядку 12, то, зафіксувавши твірний елемент a групи G, кожен може перевірити, що 4-елементна підмножина $A = \{e, a, a^3, a^7\}$ є самозачепленою і, отже, $sl(G) = 4$.

Залишається розглянути всі інші групи порядку 12. Теорема 5.1.2 дає верхню оцінку $sl(G) \leq 5$. Отже, нам потрібно показати, що $sl(G) > 4$ для всіх нециклічних груп G порядку $|G| = 12$.

3. Якщо G ізоморфна до $C_6 \oplus C_2$ або A_4, то G містить нормальну підгрупу H, ізоморфну до $C_2 \oplus C_2$. Припустивши, що $sl(G) = 4$, знайдемо 4-елементну самозачеплену підмножину $A \subset G$. Оскільки $AA^{-1} = G$, то ми можемо знайти такий зсув xA множини A, що $xA \cap H$ містить нейтральний елемент e групи G і деякий інший елемент a групи H. Замінивши A зсувом xA, можемо вважати, що $e, a \in A$. Оскільки $A \not\subset H$, то існує точка $b \in A \setminus H$. Оскільки фактор-група G/H має порядок 3, то $bH \cap Hb^{-1} = \emptyset$.

Стосовно вибору четвертого елемента $c \in A \setminus \{e, a, b\}$ є три можливості: $c \in H$, $c \in b^{-1}H$, і $c \in bH$. Якщо $c \in H$, то $bH = bH \cap AA^{-1} = b(A \cap H)^{-1}$ складається з 3 елементів – суперечність. Якщо $c \in b^{-1}H$, то $H = H \cap AA^{-1} = \{e, a\}$, що є абсурдом. Отже, $c \in bH$ і $c = bh$ для деякого $h \in H$. Оскільки $h = h^{-1}$, то одержуємо, що $cb^{-1} = bhb^{-1} = bh^{-1}b^{-1} = bc^{-1}$. Тоді $H = H \cap AA^{-1} = \{e, a, cb^{-1}, bc^{-1}\}$ має потужність $|H| = |\{e, a, cb^{-1} = bc^{-1}\}| \leq 3$ і ми приходимо до протиріччя. Цією суперечністю і закінчується доведення нерівності $sl(G) > 4$ для груп $C_6 \oplus C_2$ і A_4.

4. Припустимо, що G є ізоморфною до діедральної групи D_{12}. Тоді G містить нормальну циклічну підгрупу H порядку 6, і для кожного $b \in G \setminus H$ і $a \in H$ одержуємо, що $b^2 = e$ і $bab^{-1} = a^{-1}$. Припустивши, що $sl(D_{12}) = 4$, ми можемо знайти 4-елементну самозачеплену підмножину $A \subset G$. Нехай a – твірний елемент групи H. Оскільки $a \in AA^{-1} = G$, то ми можемо знайти такі два елементи $x, y \in A$, що $a = xy^{-1}$. Тоді зсув Ay^{-1} містить e і a. Замінивши A зсувом Ay^{-1}, якщо потрібно, ми можемо вважати, що $e, a \in A$. Оскільки $A \not\subset H$, то існує елемент $b \in A \setminus H$. Для вибору 4 елемента $c \in A \setminus \{e, a, b\}$ є дві

можливості: $c \in H$ і $c \notin H$. Якщо $c \in H$, то множина $A_H = A \cap H = \{e, a, c\}$ містить три елементи і дорівнює множині $bA_H^{-1}b^{-1}$, звідки випливає, що $bA_H^{-1} = A_H b^{-1} = bA_H^{-1} \cup A_H b^{-1} = AA^{-1} \cap bH = bH$. Це не може виконуватися, оскільки $|H| = 4 > 3 = |bA_H^{-1}|$. Тоді $c \in bH$ і, отже, $H = H \cap AA^{-1} = \{e, a, a^{-1}, bc^{-1}, cb^{-1}\}$ – суперечність, бо $|H| = 6 > 5$.

5. Припустимо, що G ізоморфна до напівпрямого добутку $C_3 \rtimes C_4$ і, отже, має вигляд $\langle a, b \mid a^4 = b^3 = 1, aba^{-1} = b^{-1}\rangle$. Тоді циклічна підгрупа H, яка породжується елементом b є нормальною в G і фактор-група G/H є циклічною порядку 4. Припустивши, що $sl(G) = 4$, розглянемо довільну 4-елементну самозачеплену підмножину $A \subset G$.

Замінивши множину A потрібним зсувом, можемо вважати, що $e, b \in A$. Оскільки $A \not\subset H$, то існує елемент $c \in A \setminus H$. Ми стверджуємо, що четвертий елемент $d \in A \setminus \{e, b, c\}$ не належить до $H \cup cH \cup c^{-1}H$. В іншому випадку, $AA^{-1} \subset H \cup cH \cup c^{-1}H \neq G$. Звідси випливає, що один з елементів, наприклад, c належить множині a^2H, а інший до aH або $a^{-1}H$. Без втрати загальності можемо вважати, що $d \in aH$. Тоді $c = a^2b^i$, $d = ab^j$ для деяких $i, j \in \{-1, 0, 1\}$. Таким чином,

$$aH = aH \cap AA^{-1} = \{d, db^{-1}, cd^{-1}\} = \{ab^j, ab^{j-1}, a^2b^{i-j}a^{-1}\} = \{ab^j, ab^{j-1}, ab^{j-i}\},$$

звідки випливає, що $i = -1$ і, отже, $c = a^2b^{-1}$. В цьому випадку ми одержуємо суперечність, дивлячись на наступні рівності

$$a^2H \cap AA^{-1} = \{c, cb^{-1}, c^{-1}, bc^{-1}\} = \{a^2b^{-1}, a^2b^{-2}, ba^2, b^2a^2\} \not\ni a^2.$$

$\square$

5.2. Максимальні інваріантні зчеплені системи

В цьому підрозділі ми вивчатимемо (максимальні) інваріантні зчеплені системи на групах.

В підрозділі 5.3 ми покажемо, що властивість інваріантності максимальної зчепленої системи $\mathcal{L} \in \lambda(G)$ є дуже сильною і вимагає від $\mathcal{L}$ бути правим нулем напівгрупи $\lambda(G)$. Такі максимальні зчеплені системи існують тільки на так званих непарних групах.

З другого боку, максимальні інваріантні зчеплені системи існують на кожній групі. Гіперпростір включення $\mathcal{A}$ на групі X є інваріантним тоді і тільки тоді, коли $x\mathcal{A} = \mathcal{A}$ для всіх $x \in X$. Множина всіх інваріантних гіперпросторів включення на X позначається через $\overleftrightarrow{G}(X)$. Згідно з твердженнями 4.4.2 і 4.4.3, $\overleftrightarrow{G}(X)$ є замкненою напівгрупою правих нулів $G(X)$, що збігається з мінімальним ідеалом напівгрупи $G(X)$.

Через $\overleftrightarrow{N}_2(X) = N_2(X) \cap \overleftrightarrow{G}(X)$ позначимо множину всіх інваріантних зчеплених систем на X і через $\overleftrightarrow{\lambda}(X) = \max \overleftrightarrow{N}_2(X)$ – сім'ю всіх максимальних елементів в $\overleftrightarrow{N}_2(X)$. Сім'я $\overleftrightarrow{\lambda}(X)$ непорожня, бо за лемою Цорна, кожен інваріантний зчеплений гіперпростір включення (зокрема, $\{X\}$) продовжується до максимального інваріантного зчепленого гіперпростору включення. Елементи $\overleftrightarrow{\lambda}(X)$ називаються *максимальними інваріантними зчепленими системами.*

Твердження 5.2.1. *Для кожної максимальної інваріантної зчепленої системи $\mathcal{L}_0$ на групі G множина*

$$\uparrow\mathcal{L}_0 = \{\mathcal{L} \in \lambda(G) : \mathcal{L} \supset \mathcal{L}_0\}$$

є лівим ідеалом в $\lambda(G)$.

Доведення. Нехай $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \lambda(G)$ – максимальні зчеплені системи і $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{B}$. Тоді для кожної підмножини $L \in \mathcal{L}_0$ маємо, що

$$L = \bigcup_{x \in G} x(x^{-1}L) \in \mathcal{A} \circ \mathcal{L}_0 \subset \mathcal{A} \circ \mathcal{B}$$

звідки випливає, що $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{A} \circ \mathcal{B}$. □

Відмітимо, що $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L} = \mathcal{L}^\perp \subset \mathcal{L}_0^\perp$ для кожної $\mathcal{L} \in \uparrow\mathcal{L}_0$. Наступна теорема показує, що різниця $\mathcal{L}_0^\perp \setminus \mathcal{L}_0$ (і, отже, $\mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_0$) є порівняно малою (для групи $G = \mathbb{Z}$ вона злічення!).

Теорема 5.2.2. *Якщо $\mathcal{L}_0$ є максимальною інваріантною зчепленою системою на абелевій групі G, то для кожної підмножини $A \in \mathcal{L}_0^\perp \setminus \mathcal{L}_0$ існує така точка $x \in G$, що $xA = G \setminus A$ і, отже, $A = x^2 A$.*

Доведення. Зафіксуємо підмножину $A \in \mathcal{L}_0^\perp \setminus \mathcal{L}_0$. Ми стверджуємо, що

$$aA \cap A = \emptyset \tag{5.2.1}$$

для деякого $a \in G$. Припустивши протилежне, ми б одержали, що сім'я $\{xA : x \in G\}$ є зчепленою і тому інваріантною зчепленою системою є $\mathcal{L}_0 \cup \{xA : x \in G\}$, яка строго містить $\mathcal{L}_0$. Це неможливо, оскільки $\mathcal{L}_0$ – максимальна.

Далі, знайдемо $b \in G$, для якого

$$A \cup bA = G. \tag{5.2.2}$$

Припустивши, що такої точки b не існує, ми отримаємо, що для кожних $x, y \in G$ об'єднання $yA \cup xA \neq G$. Тоді $(G \setminus xA) \cap (G \setminus yA) = G \setminus (xA \cup yA) \neq \emptyset$, звідки слідує, що сім'я $\{G \setminus xA : x \in G\}$ є зчепленою і інваріантною. Ми стверджуємо, що $G \setminus A \in \mathcal{L}_0^\perp$. Припустивши протилежне, ми б одержали, що $G \setminus A$ не перетинає деякої множини $L \in \mathcal{L}_0$. Тоді $L \subset A$ і, отже, $A \in \mathcal{L}_0$, чого не може бути. Таким чином $G \setminus A \in \mathcal{L}_0^\perp$ і, отже, $\{G \setminus xA : x \in G\} \subset \mathcal{L}_0^\perp$, бо $\mathcal{L}_0^\perp$ є інваріантною. Оскільки $\mathcal{L}_0 \cup \{G \setminus xA : x \in G\}$ є інваріантною зчепленою системою, що містить $\mathcal{L}_0$, то максимальність $\mathcal{L}_0$ гарантує, що $G \setminus A \in \mathcal{L}_0$ і одержуємо суперечність з $A \in \mathcal{L}_0^\perp$.

Насамкінець, покажемо, що $G \setminus A = aA = bA$. Відмітимо, що з (5.2.1) і (5.2.2) випливає $aA \subset bA$ і, отже, $A \subset a^{-1}bA$. З другого боку, (5.2.1) і (5.2.2) є еквівалентними до рівностей $a^{-1}A \cap A = \emptyset$ і $b^{-1}A \cup A = G$, звідки випливає, що $a^{-1}A \subset b^{-1}A$ і, отже, $ba^{-1}A \subset A$. Об'єднавши це включення з $A \subset a^{-1}bA = ba^{-1}A$, одержуємо, що $ba^{-1}A = A$ і, отже, $bA = aA$. Тепер, дивлячись на (5.2.1) і (5.2.2), бачимо, що $G \setminus A = aA = bA$. $\square$

Теорема 5.2.3. *Для кожної групи X множина $\overset{\leftrightarrow}{\lambda}(X)$ є непорожньою замкненою напівгрупою правих нулів напівгрупи $G(X)$.*

Доведення. З того, що $\overleftrightarrow{G}(X)$ є напівгрупою правих нулів (див. твердження 4.4.2) і $\overleftrightarrow{\lambda}(X) \subset \overleftrightarrow{G}(X)$ випливає, що $\overleftrightarrow{\lambda}(X)$ теж є напівгрупою правих нулів.

З леми Цорна випливає, що кожну інваріантну зчеплену систему на X (зокрема, $\{X\}$) можна продовжити до максимальної інваріантної зчепленої системи на X. Звідси випливає, що множина $\overleftrightarrow{\lambda}(X)$ є непорожньою. Далі, покажемо, що піднапівгрупа $\overleftrightarrow{\lambda}(X)$ є замкненою в $G(X)$. Оскільки множина $\overleftrightarrow{N}_2(X) = N_2(X) \cap \overleftrightarrow{G}(X)$ є замкненою в $G(X)$, то досить показати, що $\overleftrightarrow{\lambda}(X)$ є замкненою в $\overleftrightarrow{N}_2(X)$. Розглянемо довільну інваріантну зчеплену систему $\mathcal{L} \in \overleftrightarrow{N}_2(X) \setminus \overleftrightarrow{\lambda}(X)$. Оскільки зчеплена система $\mathcal{L}$ не є максимальною інваріантною, то її можна продовжити до максимальної інваріантної зчепленої системи $\mathcal{M}$, що містить підмножину $B \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{L}$. Оскільки $\mathcal{M} \ni B$ є інваріантною, то система $\{xB : x \in X\} \subset \mathcal{M}$ є зчепленою. Відмітимо, що з $B \notin \mathcal{L}$ і $B \in \mathcal{M} \supset \mathcal{L}$ випливає, що $X \setminus B \in \mathcal{L}^{\perp}$ і $B \in \mathcal{L}^{\perp}$. Ми стверджуємо, що $O(\mathcal{L}) = B^{-} \cap (X \setminus B)^{-} \cap \overleftrightarrow{N}_2(X)$ є околом $\mathcal{L}$ в $\overleftrightarrow{N}_2(X)$, що не перетинає множину $\overleftrightarrow{\lambda}(X)$. Справді, для довільного $\mathcal{A} \in O(\mathcal{L})$, одержуємо, що $\mathcal{A}$ є такою інваріантною зчепленою системою, що $B \in \mathcal{A}^{\perp}$. Відмітимо, що для кожного $x \in X$ і $A \in \mathcal{A}$ одержуємо, що $x^{-1}A \in \mathcal{A}$ за інваріантністю $\mathcal{A}$ і, отже, множина $B \cap x^{-1}A$ і її зсув $xB \cap A$ є непорожніми. Звідси випливає, що $xB \in \mathcal{A}^{\perp}$ для кожного $x \in X$. Тоді максимальна зчеплена система, породжена $\mathcal{A} \cup \{xB : x \in X\}$, є інваріантним зчепленим продовженням $\mathcal{A}$, звідки випливає, що $\mathcal{A}$ не є максимальною інваріантною зчепленою системою. $\square$

Далі, ми обчислимо потужність $\overleftrightarrow{\lambda}(X)$.

Теорема 5.2.4. *Для довільної нескінченної групи X напівгрупа $\overleftrightarrow{\lambda}(X)$ має потужність $|\overleftrightarrow{\lambda}(X)| = 2^{2^{|X|}}$.*

Доведення. Верхня оцінка $|\overleftrightarrow{\lambda}(X)| \le 2^{2^{|X|}}$ випливає з ланцюжка включень:

$$\overleftrightarrow{\lambda}(X) \subset G(X) \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)).$$

Доведемо, що $|\overleftrightarrow{\lambda}(X)| \ge 2^{2^{|X|}}$. Нехай $|X| = \kappa$ і $X = \{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$ – ін'єктивна нумерація групи X такими ординалами $< \kappa$, що x_0 є нейтральним елементом групи X. Для кожного $\alpha < \kappa$ покладемо $B_\alpha = \{x_\beta, x_\beta^{-1} : \beta < \alpha\}$. За трансфінітною індукцією, оберемо таку трансфінітну послідовність $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$, що $a_0 = x_0$ і

$$a_\alpha \notin B_\alpha^{-1} B_\alpha A_{<\alpha},$$

де $A_{<\alpha} = \{a_\beta : \beta < \alpha\}$.

Розглянемо множину $A = \{a_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Згідно з [55, теор. 3.58], множина $U_\kappa(A)$ всіх κ-рівномірних ультрафільтрів на A має потужність $|U_\kappa(A)| = 2^{2^\kappa}$. Нагадаємо, що ультрафільтр $\mathcal{U}$ називається *κ-рівномірним*, якщо для кожної множини $U \in \mathcal{U}$ і кожної підмножини $K \subset U$ потужності $|K| < \kappa$ множина $U \setminus K$ теж належить до $\mathcal{U}$.

Кожному κ-рівномірному ультрафільтру $\mathcal{U} \in U_\kappa(A)$ співставимо інваріантний фільтр $\mathcal{F}_\mathcal{U} = \bigcap_{x\in X} x\mathcal{U}$. Цей фільтр можна продовжити до максимальної інваріантної зчепленої системи $\mathcal{L}_\mathcal{U}$. Ми стверджуємо, що $\mathcal{L}_\mathcal{U} \neq \mathcal{L}_\mathcal{V}$ для двох різних κ-рівномірних ультрафільтрів $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ на A. Справді, оскільки $\mathcal{U} \neq \mathcal{V}$ то існує така множина $U \subset A$, що $U \in \mathcal{U}$ і $U \notin \mathcal{V}$. Нехай $V = A \setminus U$. Оскільки $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ є κ-рівномірними, то $|U| = |V| = \kappa$.

Для кожного $\alpha < \kappa$ розглянемо множини $U_\alpha = \{a_\beta \in U : \beta > \alpha\} \in \mathcal{U}$ і $V_\alpha = \{a_\beta \in V : \beta > \alpha\} \in \mathcal{V}$.

Легко бачити, що

$$F_U = \bigcup_{\alpha<\kappa} x_\alpha U_\alpha \in \mathcal{F}_\mathcal{U} \text{ і } F_V = \bigcup_{\alpha<\kappa} x_\alpha V_\alpha \in \mathcal{F}_\mathcal{V}.$$

Покажемо, що $F_U \cap F_V = \emptyset$. В іншому випадку існували б такі два ординали α, β і точки $u \in U_\alpha$, $v \in V_\beta$, що $x_\alpha u = x_\beta v$. З $u \neq v$ випливає, що $\alpha \neq \beta$. Запишемо точки u, v як $u = a_\gamma$ і $v = a_\delta$ для деяких $\gamma > \alpha$ і $\delta > \beta$. Ми одержуємо рівність $x_\alpha a_\gamma = x_\beta a_\delta$. З нерівності $u \neq v$ випливає, що $\gamma \neq \delta$. Без втрати загальності, припустимо, що $\delta > \gamma$. Тоді

$$a_\delta = x_\beta^{-1} x_\alpha a_\gamma \in B_\delta^{-1} B_\delta A_{<\delta},$$

що суперечить вибору a_δ.

Таким чином, $F_U \cap F_V = \emptyset$. Взявши до уваги, що зчеплені системи $\mathcal{L}_{\mathcal{U}} \supset \mathcal{F}_{\mathcal{U}} \ni F_U$ і $\mathcal{L}_{\mathcal{V}} \supset \mathcal{F}_{\mathcal{V}} \ni F_V$ містять диз'юнктні множини F_U, F_V, робимо висновок, що $\mathcal{L}_{\mathcal{U}} \neq \mathcal{L}_{\mathcal{V}}$. Таким чином,

$$|\overset{\leftrightarrow}{\lambda}(X)| \geq |\{\mathcal{L}_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \in \mathcal{U}_\kappa(A)\}| = |U_\kappa(A)| = 2^{2^\kappa}.$$

□

З попередньої теореми випливає, що $|\overset{\leftrightarrow}{\lambda}(G)| = 2^{\mathfrak{c}}$ для кожної зліченної групи G. Далі, ми обчислимо потужність $\overset{\leftrightarrow}{\lambda}(G)$ для скінченних груп G.

Маючи скінченну групу G, розглянемо інваріантну зчеплену систему

$$\mathcal{L}_0 = \{A \subset X : 2|A| > |G|\}$$

і підмножину

$$\uparrow\!\mathcal{L}_0 = \{\mathcal{A} \in \overset{\leftrightarrow}{\lambda}(G) : \mathcal{A} \supset \mathcal{L}_0\}.$$

Твердження 5.2.5. *Нехай G – скінченна група. Якщо $sl(G) \geq |G|/2$, то $\overset{\leftrightarrow}{\lambda}(G) = \uparrow\!\mathcal{L}_0$.*

Доведення. Нам потрібно довести, що кожна максимальна інваріантна зчеплена система $\mathcal{A} \in \overset{\leftrightarrow}{\lambda}(G)$ містить $\mathcal{L}_0$. Розглянемо довільну множину $L \in \mathcal{L}_0$. Взявши до уваги, що $sl(G) \geq |G|/2$ і кожна множина $A \in \mathcal{A}$ є самозачепленою, одержуємо, що $|A| \geq |G|/2$ і, отже, A перетинає кожен зсув xL множини L (бо $|A| + |xL| > |G|$). Оскільки множина L є самозачепленою, то ми одержуємо, що інваріантна зчеплена система $\mathcal{A} \cup \{xL : x \in G\}$ збігається з $\mathcal{A}$ за максимальністю системи $\mathcal{A}$. Таким чином, $L \in \mathcal{A}$ і, отже, $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{A}$. □

З огляду на твердження 5.2.5 важливо обчислити потужність множини $\uparrow\!\mathcal{L}_0$. Якщо $|G|$ є непарним, то інваріантна зчеплена система $\mathcal{L}_0$ є максимальною зчепленою і, отже, $\uparrow\!\mathcal{L}_0$ – одноточкова. Випадок парного порядку $|G|$ є менш тривіальним.

Маючи групу G скінченного парного порядку $|G|$, розглянемо сім'ю

$$\mathcal{S} = \{A \subset G : AA^{-1} = G,\ |A| = |G|/2\}$$

самозачеплених підмножин $A \subset G$ потужності $|A| = |G|/2$. На сім'ї $\mathcal{S}$ розглянемо відношення еквівалентності $\sim$, поклавши $A \sim B$ для $A, B \in \mathcal{S}$, якщо існує такий $x \in G$, що $A = xB$ або $X \setminus A = xB$. Нехай $\mathcal{S}/_\sim$ – фактор-множина множини $\mathcal{S}$ за цим відношенням еквівалентності і $s = |\mathcal{S}/_\sim|$.

Твердження 5.2.6. $|\overset{\leftrightarrow}{\lambda}(G)| \geq |{\uparrow}\mathcal{L}_0| = 2^s$.

Доведення. Спершу покажемо, що $\sim$ насправді є відношенням еквівалентності на $\mathcal{S}$. Отже, припустимо, що $\mathcal{S} \neq \emptyset$. Покажемо, що $G \setminus A \in \mathcal{S}$ для кожного $A \in \mathcal{S}$. Нехай $B = G \setminus A$. Припустивши, що $B \notin \mathcal{S}$, ми стверджуємо, що $B \cap xB = \emptyset$ для деякого $x \in G$. Оскільки $|B| = |A| = |G|/2$, то ми одержуємо, що $xB = A$ і $G \setminus A = B = x^{-1}A$. З нерівності $A \cap x^{-1}A = \emptyset$ випливає, що $x^{-1} \notin AA^{-1} = G$, і ми одержуємо суперечність.

Взявши до уваги, що $A = eA$ для кожного $A \in \mathcal{S}$, робимо висновок, що $\sim$ є рефлексивним відношенням на $\mathcal{S}$. Якщо $A \sim B$, то існує таке $x \in X$, що $A = xB$ або $G \setminus A = xB$. Звідси випливає, що $B = x^{-1}A$ або $X \setminus B = x^{-1}A$, тобто $B \sim A$ і $\sim$ є симетричним. Залишається довести, що відношення $\sim$ є транзитивним на $\mathcal{S}$. Отже, нехай $A \sim B \sim C$. Це означає, що існують такі $x, y \in G$, що $A = xB$ або $G \setminus A = xB$ і $B = yC$ або $G \setminus B = yC$. Легко перевірити, що в цих випадках $A = xyC$ або $X \setminus A = xyC$.

Оберемо підмножину $\mathcal{T}$ множини $\mathcal{S}$, що перетинає кожен клас еквівалентності $\sim$ в єдиній точці. Відмітимо, що $|\mathcal{T}| = |\mathcal{S}/_\sim| = s$. Далі, для кожної функції $f : \mathcal{T} \to 2 = \{0, 1\}$ розглянемо максимальну інваріантну зчеплену систему

$$\mathcal{L}_f = \mathcal{L}_0 \cup \{xT : x \in G,\ T \in f^{-1}(0)\} \cup \{x(G \setminus T) : x \in G,\ T \in f^{-1}(1)\}.$$

Можна показати, що

$$|{\uparrow}\mathcal{L}_0| = |\{\mathcal{L}_f : f \in 2^{\mathcal{T}}\}| = 2^{|\mathcal{T}|} = 2^s.$$

□

Наступне твердження допоможе нам обчислити потужність множини $\overset{\leftrightarrow}{\lambda}(G)$ для всіх скінченних груп G порядку $|G| \leq 8$:

Теорема 5.2.7. *Потужність множини $\overset{\leftrightarrow}{\lambda}(G)$ для групи G потужності $|G| \le 8$ можна знайти в наступній таблиці:*

G	C_2	C_3	C_4	$C_2 \oplus C_2$	C_5	D_6	C_6	C_7	C_2^3	D_8	$C_4 \oplus C_2$	C_8	Q_8
$sl(G)$	2	2	3	3	3	4	3	3	5	4	4	4	4
$\overset{\leftrightarrow}{\lambda}(G)$	1	1	1	1	1	1	2	3	1	2	4	8	8

Доведення. Поділимо доведення на 3 випадки.

1. Якщо $sl(G) > |G|/2$, то $\mathcal{L}_0$ є єдиною максимальною інваріантною зчепленою системою і, отже, $|\overset{\leftrightarrow}{\lambda}(G)| = 1$. За теоремою 5.1.2, $sl(G) > |G|/2$ тоді і тільки тоді, коли $|G| \le 5$ або G ізоморфна до D_6 або C_2^3.

2. Якщо $sl(G) = |G|/2$, то $|\overset{\leftrightarrow}{\lambda}(G)| = 2^s$, де $s = |\mathcal{S}/_\sim|$. Отже, залишається обчислити число s для груп C_6, D_8, $C_4 \oplus C_2$, C_8, і Q_8.

2a. Якщо G є циклічною порядку 6, то оберемо довільний твірний елемент a групи G і прямим обчисленням перевіряємо, що

$$\mathcal{S} = \{xT, x(G \setminus T) : x \in G\},$$

де $T = \{e, a, a^3\}$. Звідси випливає, що $s = |\mathcal{S}/_\sim| = 1$ і, отже,

$$|\overset{\leftrightarrow}{\lambda}(G)| = |{\uparrow}\mathcal{L}_0| = 2^s = 2.$$

2b. Якщо G є циклічною порядку 8, то зафіксувавши твірний елемент a групи G, прямим обчисленням можна перевірити, що

$$\mathcal{S} = \{xA, G \setminus xA, xB, G \setminus xB, C, G \setminus xC : x \in G\},$$

де $A = \{e, a, a^2, a^4\}$, $B = \{e, a, a^2, a^5\}$, і $C = \{e, a, a^3, a^5\}$. Звідси випливає, що $s = |\mathcal{S}/_\sim| = 3$ і, отже,

$$|\overset{\leftrightarrow}{\lambda}(G)| = |{\uparrow}\mathcal{L}_0| = 2^s = 8.$$

2c. Припустимо, що група G ізоморфна до $C_4 \oplus C_2$ і нехай $G_2 = \{x \in G : xx = e\}$ – булева підгрупа групи G. Ми стверджуємо, що 4-елементна підмножина $A \subset G$ є самозачепленою тоді і тільки тоді, коли $|A \cap G_2|$ є непарним.

Щоб довести достатність цього твердження, припустимо, що $|A \cap G_2| = 3$. Ми стверджуємо, що A є самозачепленою. Нехай $A_2 = A \cap G_2$, тоді маємо, що

$G_2 = A_2A_2^{-1} \subset AA^{-1}$, бо $|A_2| = 3 > 2 = |G_2|/2$. Далі, зафіксуємо довільний елемент $a \in A \setminus G_2$, відмітимо, що $AA^{-1} \supset aA_2^{-1} \cup A_2a^{-1}$. Бачимо, що обидві множини $aA_2^{-1} = aA_2$ і $A_2a^{-1} = a^{-1}A_2$ є 3-елементними підмножинами в 4-елементній множині aG_2. Ці 3-елементні множини є різними. Справді, припустивши, що $aA_2^{-1} = A_2a^{-1}$, ми б одержали, що $a^2A_2 = A_2$, звідки випливає, що $|A_2| = 3$ є парним. Таким чином, $aG_2 = aA_2^{-1} \cup A_2a^{-1} \subset AA^{-1}$ і, остаточно, $G = AA^{-1}$.

Якщо $|A \cap G_2| = 1$, то ми можемо зафіксувати довільний $a \in A \setminus G_2$ і розглянути зсув Aa^{-1}, для якого $|Aa^{-1} \cap G_2| = 3$. Тоді з попереднього випадку випливає, що Aa^{-1} є самозачепленою і, отже, такою є A.

Щоб довести необхідність твердження припустимо, що $|A \cap G_2|$ є парним. Якщо $|A \cap G_2| = 4$, то $A = G_2$ і $AA^{-1} = G_2G_2^{-1} = G_2 \neq G$. Якщо $|A \cap G_2| = 0$, то $A = G_2a$ для кожного $a \in A$ і, отже, $AA^{-1} = G_2aa^{-1}G_2^{-1} = G_2 \neq G$. Якщо $|A \cap G_2| = 2$, то $|G_2 \cap AA^{-1}| \leq 3$ і знову одержуємо $AA^{-1} \neq G$.

Отже,

$$\mathcal{S} = \{A \subset G : |A| = 4 \text{ і } |A \cap G_2| \text{ є непарним}\}.$$

Кожна множина $A \in \mathcal{S}$ має такий єдиний зсув aA, що $aA \cap G_2 = \{e\}$. Існує рівно чотири підмножини $A \in \mathcal{S}$ з $A \cap G_2 = \{e\}$, що утворюють два класи еквівалентності за відношенням $\sim$. Таким чином, $s = 2$ і

$$|\overset{\leftrightarrow}{\lambda}(G)| = |{\uparrow}\mathcal{L}_0| = 2^s = 4.$$

2d. Припустимо, що G є ізоморфною до діедральної групи D_8 симетрій квадрата. Тоді G містить елемент a порядку 4, що породжує нормальну циклічну підгрупу H. Елемент a^2 комутує з усіма елементами групи G.

Ми стверджуємо, що для кожної самозачепленої 4-елементної підмножини $A \subset G$ виконано $|A \cap H| = 2$. Справді, якщо $|A \cap H|$ дорівнює 0 або 4, то $A = Hb$ для деякого $b \in G$ і, отже, $AA^{-1} = Abb^{-1}A^{-1} = H \neq G$. Якщо $|A \cap H|$ дорівнює 1 або 3, то замінюючи A її зсувом, можемо вважати, що $A \cap H = \{e\}$ і, отже, $A = \{e\} \cup B$ для деякої 3-елементної підмножини $B \subset G \setminus H$. Звідси випливає, що $G \setminus H = AA^{-1} \setminus H = (B \cup B^{-1}) = B \neq G \setminus H$. Ця суперечність показує, що

$|A \cap H| = 2$. Без втрати загальності, можемо вважати, що $A \cap H = \{e, a^2\}$ (якщо це не так, замінюємо A її зсувом Ax^{-1}, де $x, y \in A$ є таким, що $yx^{-1} = a^2$). Далі, зафіксуємо довільний елемент $b \in A \setminus H$. Оскільки G не є абелевою, одержуємо, що $ab = ba^3$. Відмітимо, що $ba^2 \notin A$ (в протилежному випадку $A = \{e, b, a^2, ba^2\}$ була б підгрупою групи G з $AA^{-1} = A \neq G$). Таким чином, 4-ий елемент $c \in A \setminus \{e, a^2, b\}$ множини A має вигляд $c = ba$ або $c = ba^3 = ab$. Відмітимо, що обидві множини $A_1 = \{e, a^2, b, ba\}$ і $A_2 = \{e, a^2, b, ab\}$ є самозачепленими, а також, що

$$a^3(G \setminus A_1) = a^3 \cdot \{a, a^3, ba^2, ba^3\} = \{e, a^2, ab, b\} = A_2.$$

Таким чином, $s = |\mathcal{S}/_\sim| = 1$ і $|\overleftrightarrow{\lambda}(G)| = 2^s = 2$.

2е. Насамкінець, припустимо, що G є ізоморфною до групи кватерніонів $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$. Двоелементна підмножина $H = \{-1, 1\}$ є нормальною підгрупою в G. Нехай $\mathcal{S}_\pm = \{A \in S : H \subset A\}$ і відмітимо, що кожна множина $A \in \mathcal{S}$ має лівий зсув в $\mathcal{S}$. Зафіксуємо довільну множину $A \in \mathcal{S}_\pm$ і точку $a \in A \setminus \{1, -1\}$. Відмітимо, що 4-ий елемент $b \in A \setminus \{1, -1, a\}$ множини A не дорівнює $-a$ (в іншому випадку, A є підгрупою групи G).

Таким чином, кожен може легко перевірити, що $A = \{1, -1, a, b\}$, де $a, b \in G \setminus H$ і $a \neq -b$, є самозачепленою. Звідси випливає, що

$$\mathcal{S}_\pm = \{\{-1, 1, a, b\} : a \neq -b \text{ і } a, b \in G \setminus H\}$$

і, отже, $|\mathcal{S}_\pm| = C_6^2 - 3 = 12$. Відмітимо, що для кожного $A \in \mathcal{S}_\pm$ множина $-A \in \mathcal{S}_\pm$ і є точно два зсуви $G \setminus A$, що належать до $\mathcal{S}_\pm$. Це означає, що клас еквівалентності $[A]_\sim$ довільної множини $A \in \mathcal{S}$ перетинає $\mathcal{S}_\pm$ в чотирьох множинах. Таким чином, $s = |\mathcal{S}/_\sim| = |\mathcal{S}_\pm|/4 = 12/4 = 3$ і

$$|\overleftrightarrow{\lambda}(G)| = |{\uparrow}\mathcal{L}_0| = 2^s = 8.$$

3. Якщо $|G| = 7$, то $\mathcal{L}_0$ є одним з трьох елементів множини $\overleftrightarrow{\lambda}(G)$. Інші два елементи можна знайти наступним чином. Розглянемо інваріантну зчеплену систему

$$\mathcal{L}_1 = \{A \subset G : |A| \geq 5\}$$

і відмітимо, що $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{A}$ для кожного $\mathcal{A} \in \overset{\leftrightarrow}{\lambda}(G)$. Справді, припустивши, що деякий $A \in \mathcal{L}_1$ не належить до $\mathcal{A}$, ми б одержали, що $B = G \setminus A \in \mathcal{A}$ за максимальністю системи $\mathcal{A}$. Оскільки $|G \setminus B| \leq 2$, то ми можемо знайти $x \in G \setminus BB^{-1}$. Звідси випливає, що B, xB – дві диз'юнктні множини в $\mathcal{A}$, що є неможливим. Отже, $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{A}$.

Відмітимо, що $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{L}_0 \cup \mathcal{L}_3$, де

$$\mathcal{L}_3 = \{A \subset G : |A| = 3,\ AA^{-1} = G\}.$$

Зафіксуємо твірний елемент a циклічної групи G, розглянемо 3-елементну множину $T = \{a, a^2, a^4\}$ і відмітимо, що $TT^{-1} = G$ і $T^{-1} \cap T = \emptyset$. Прямим обчисленням кожен може перевірити, що

$$\mathcal{L}_3 = \{xT, xT^{-1} : x \in G\}.$$

Оскільки T і T^{-1} не перетинаються, то інваріантна зчеплена система $\mathcal{A}$ не може містити обидві множини T і T^{-1}. Якщо $\mathcal{A}$ не містить жодної множини T, T^{-1}, то $\mathcal{A} = \mathcal{L}_0$. Якщо $\mathcal{A}$ містить T, то

$$\mathcal{A} = (\mathcal{L}_0 \cup \{xT : x \in G\}) \setminus \{y(G \setminus T) : y \in G\}.$$

Якщо $T^{-1} \in \mathcal{A}$, то

$$\mathcal{A} = (\mathcal{L}_0 \cup \{xT^{-1} : x \in G\}) \setminus \{y(G \setminus T^{-1}) : y \in G\}.$$

Це і є єдині 3 максимальні інваріантні зчеплені системи в $\overset{\leftrightarrow}{\lambda}(G)$. $\square$

В наступній теоремі ми охарактеризуємо групи, на яких існує єдина максимальна інваріантна зчеплена система.

Теорема 5.2.8. *Для скінченної групи G наступні умови є еквівалентними:*

1) $|\overset{\leftrightarrow}{\lambda}(G)| = 1$;
2) $sl(G) > |G|/2$;
3) $|G| \leq 5$ *або* G *ізоморфна до* D_6 *або* C_2^3.

Доведення. (2) $\Rightarrow$ (1). Якщо $sl(G) > |G|/2$, то $\mathcal{L}_0 = \{A \subset G : |A| > |G|/2\}$ є єдиною максимальною інваріантною зчепленою системою на G (бо максимальні інваріантні зчеплені системи складаються з самозачеплених множин).

(1) $\Rightarrow$ (2) Припустимо, що $sl(G) \leq |G|/2$ і зафіксуємо таку довільну самозачеплену множину $A \subset G$, що $|A| \leq |G|/2$. Якщо $|G|$ є непарним, то $\mathcal{L}_0$ є максимальною зчепленою і тоді довільна максимальна інваріантна зчеплена система $\mathcal{A}$, що містить самозачеплену множину A є відмінною від $\mathcal{L}_0$, що і доводить нерівність $|\overleftrightarrow{\lambda}(G)| > 1$.

Якщо G є парним, то ми можемо продовжити A, якщо потрібно, і припустити, що $|A| = |G|/2$. Ми стверджуємо, що доповнення $B = G \setminus A$ множини A також є самозачепленою множиною. Припустивши протилежне, ми б знайшли деякий $x \notin BB^{-1}$ і одержали б, що $B \cap xB = \emptyset$, звідки випливає, що $A = G \setminus B = xB$ і, отже, $x^{-1}A = B$. Далі, множини A і $x^{-1}A$ були б неперетинними, що суперечить $x^{-1} \in AA^{-1} = G$. Отже, $BB^{-1} = G$, звідки випливає, що $\{xB : x \in G\}$ є інваріантною зчепленою системою. Оскільки $|G| = 2|A|$ є парним, то об'єднання $\mathcal{A} = \{xA : x \in G\} \cup \mathcal{L}_0$ і $\mathcal{B} = \{xB : x \in G\} \cup \mathcal{L}_0$ є інваріантними зчепленими системами, які можуть бути продовжені до максимальних зчеплених систем $\tilde{\mathcal{A}}$ і $\tilde{\mathcal{B}}$, відповідно. Оскільки множини $A \in \mathcal{A} \subset \tilde{\mathcal{A}}$ і $B \in \mathcal{B} \subset \tilde{\mathcal{B}}$ є неперетинними, то $\tilde{\mathcal{A}} \neq \tilde{\mathcal{B}}$ є двома різними максимальними інваріантними зчепленими системами на G і, отже, $|\overleftrightarrow{\lambda}(G)| \geq 2$.

Еквівалентність (2) $\Leftrightarrow$ (3) випливає з теореми 5.1.2(i). $\square$

5.3. Праві нулі в суперрозширеннях груп

В цьому підрозділі ми охарактеризуємо групи X, суперрозширення $\lambda(X)$ яких мають праві нулі. Ми покажемо, що для кожної групи X праві нулі напівгрупи $\lambda(X)$ збігаються з інваріантними максимальними зчепленими системами.

Згідно з твердженням 4.4.1 гіперпростір включення $\mathcal{A} \in G(X)$ є правим нулем в $G(X)$ тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{A}$ є інваріантним. Звідси випливає, що мінімальний ідеал напівгрупи $G(X)$ збігається з множиною $\overleftrightarrow{G}(X)$ інваріантних гіперпросторів включення і є компактною топологічною напівгрупою правих нулів.

Подібна характеризація правих нулів має місце також і для напівгрупи $\lambda(X)$.

Твердження 5.3.1. *Максимальна зчеплена система $\mathcal{L}$ є правим нулем напівгрупи $\lambda(X)$ тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{L}$ є інваріантною.*

Доведення. Якщо $\mathcal{L}$ є інваріантною, то згідно з твердженням 4.4.1, $\mathcal{L}$ є правим нулем в $G(X)$ і, таким чином, правим нулем в $\lambda(X)$.

Навпаки, припустимо, що $\mathcal{L}$ є правим нулем в $\lambda(X)$. Тоді для кожного $x \in X$ одержуємо $x\mathcal{L} = \mathcal{L}$, звідки випливає, що $\mathcal{L}$ є інваріантною. □

На відміну від напівгрупи $G(X)$, яка завжди містить праві нулі, напівгрупа $\lambda(X)$ містить праві нулі тільки для так званих непарних груп. Кажемо, що група X є *непарною*, якщо кожен елемент $x \in X$ має непарний порядок. Нагадаємо, що *порядком* елемента x називається таке найменше ціле число $n \geq 1$, що x^n дорівнює нейтральному елементу e групи X.

Теорема 5.3.2. *Для групи X наступні умови еквівалентні:*

1) *напівгрупа $\lambda(X)$ має правий нуль;*

2) *деяка максимальна інваріантна зчеплена система на X є максимальною зчепленою (що може бути записано як $\overleftrightarrow{\lambda}(X) \cap \lambda(X) \neq \emptyset$);*

3) *кожна максимальна інваріантна зчеплена система є максимальною зчепленою (що може бути записано як $\overleftrightarrow{\lambda}(X) \subset \lambda(X)$);*

4) *для кожного розбиття $X = A \cup B$ або $AA^{-1} = X$ або $BB^{-1} = X$;*

5) *кожен елемент групи X має непарний порядок.*

Доведення. Рівносильність (1) $\Leftrightarrow$ (2) випливає з твердження 5.3.1.

(2) $\Rightarrow$ (4) Припустимо, що $\lambda(X)$ містить інваріантну максимальну зчеплену систему $\mathcal{A}$. Зафіксувавши довільне розбиття $X = A_1 \cup A_2$, використовуємо максимальність $\mathcal{A}$, щоб знайти $i \in \{1, 2\}$ з $A_i \in \mathcal{A}$. Ми стверджуємо,

що $A_iA_i^{-1} = X$. Справді, для кожного $x \in X$ з інваріантності $\mathcal{A}$ випливає, що $xA_i \in \mathcal{A}$ і, отже, $A_i \cap xA_i \neq \emptyset$, звідки маємо $x \in A_iA_i^{-1}$.

(4) $\Rightarrow$ (3) Припустимо, що для кожного розбиття $X = A \cup B$ або $AA^{-1} = X$ або $BB^{-1} = X$. Потрібно перевірити, що кожна максимальна інваріантна зчеплена система $\mathcal{L}$ є максимальною зчепленою. В іншому випадку, ми б знайшли множину $A \in \mathcal{L}^\perp \setminus \mathcal{L}$. Оскільки $\mathcal{L} \not\ni A$ є максимальною інваріантною зчепленою системою, то деякий зсув xA множини A не перетинає A і, отже, $x \notin AA^{-1}$. Тоді з нашого припущення випливає, що $B = X \setminus A$ має властивість $BB^{-1} = X$, тобто сім'я $\{xB : x \in X\}$ є зчепленою. Ми стверджуємо, що $B \in \mathcal{L}^\perp$. Припустивши протилежне, ми б знайшли таку множину $L \in \mathcal{L}$, що $L \cap B = \emptyset$ і одержали б, що $A \in \mathcal{L}$, бо $L \subset X \setminus B = A$. Але це суперечить вибору $A \in \mathcal{L}^\perp \setminus \mathcal{L}$. Таким чином, $B \in \mathcal{L}^\perp$ і

$$\mathcal{L} \cup \{L \subset X : \exists x \in X \ (xB \subset L)\}$$

є інваріантною зчепленою системою, яка продовжує $\mathcal{L}$. Оскільки $\mathcal{L}$ є максимальною інваріантною зчепленою системою, то ми одержуємо, що $B \in \mathcal{L}$, це є неможливим, бо B не перетинає $A \in \mathcal{L}^\perp$. Одержана суперечність показує, що $\mathcal{L}^\perp \setminus \mathcal{L} = \emptyset$, тобто, що $\mathcal{L}$ належить до $\lambda(X)$ і, отже, є інваріантною максимальною зчепленою системою.

Імплікація (3) $\Rightarrow$ (2) є тривіальною.

$\neg$(5) $\Rightarrow$ $\neg$(4) Припустимо, що $X \setminus \{e\}$ містить точку a, порядок якої є парним або нескінченним. Тоді циклічна підгрупа $H = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$, породжена a розбивається на дві такі неперетинні множини $H_1 = \{a^n : n \in 2\mathbb{Z} + 1\}$ і $H_2 = \{a^n : n \in 2\mathbb{Z}\}$, що $aH_1 = H_2$. Зафіксуємо підмножину $S \subset X$, що перетинає кожну множину Hx, $x \in X$, в єдиній точці. Розглянемо неперетинні множини $A_1 = H_1S$ і $A_2 = H_2S$ і відмітимо, що $aA_1 = A_2 = X \setminus A_1$ і $aA_2 = X \setminus A_2$, звідки випливає, що $a \notin A_iA_i^{-1}$ для $i \in \{1, 2\}$. Оскільки $A_1 \cup A_2 = X$, то ми одержуємо заперечення (4).

(5) $\Rightarrow$ (4) Припустимо, що кожен елемент групи X має непарний порядок і що X володіє таким розбиттям $X = A \sqcup B$, що $a \notin AA^{-1}$ і $b \notin BB^{-1}$ для деяких

$a, b \in X$. Тоді $aA \subset X \setminus A = B$ і $bB \subset X \setminus B = A$. Відмітимо, що

$$baA \subset bB \subset A$$

і за індукцією, $(ba)^i A \subset A$ для всіх $i > 0$. Оскільки всі елементи групи X мають скінченний порядок, то $(ba)^n = e$ для деякого $n \in \mathbb{N}$. Тоді з $(ba)^{n-1}A \subset A$ випливає, що

$$A = (ba)^n A \subset baA \subset bB \subset A$$

і, отже, $bB = A$. З рівностей

$$X = bA \sqcup bB = bA \sqcup A = B \sqcup A$$

випливає, що $bA = B$. Отже, $x \in A$ тоді і тільки тоді, коли $bx \in B$.

Нехай $H = \{b^n : n \in \mathbb{Z}\} \subset X$ – циклічна підгрупа, породжена b. За нашим припущенням b має непарний порядок. З другого боку, з рівності $bB = A = b^{-1}B$ випливає, що перетини $H \cap A$ і $H \cap B$ мають однакову потужність, оскільки $b(B \cap H) = A \cap H$. Але це неможливо, бо H має непарний порядок. $\square$

5.4. (Ліві) нулі напівгруп $\lambda(G)$

Твердження 5.4.1. *Нехай G є групою. Для максимальної зчепленої системи $\mathcal{L} \in \lambda(G)$ наступні умови еквівалентні:*

1) *$\mathcal{L}$ є лівим нулем в $\lambda(G)$;*
2) *$\mathcal{L}$ є нулем в $\lambda(G)$;*
3) *$\mathcal{L}$ є єдиною інваріантною максимальною зчепленою системою на G.*

Доведення. (1) $\Rightarrow$ (3) Припустимо, що $\mathcal{Z}$ є лівим нулем в $\lambda(G)$. Тоді $\mathcal{Z}x = \mathcal{Z}$ для всіх $x \in G$ і, отже,

$$\mathcal{Z}^{-1} = \{Z^{-1} : Z \in \mathcal{Z}\}$$

є інваріантною максимальною зчепленою системою на G, звідки випливає, що група G є непарною згідно з теоремою 5.3.2. Відмітимо, що для кожного правого нуля $\mathcal{A}$ напівгрупи $\lambda(G)$ маємо

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z} \circ \mathcal{A} = \mathcal{A},$$

звідки випливає, що $\mathcal{Z}$ є єдиним правим нулем в $\lambda(G)$ і згідно з твердженням 5.3.1 єдиною інваріантною зчепленою системою на G.

(3) $\Rightarrow$ (2) Припустимо, що $\mathcal{Z}$ є єдиною інваріантною максимальною зчепленою системою на G. Ми стверджуємо, що $\mathcal{Z}$ є лівим нулем напівгрупи $\lambda(G)$. Справді, для кожного $\mathcal{A} \in \mathcal{A}$ і $x \in G$ маємо, що $x\mathcal{Z} \circ \mathcal{A} = \mathcal{Z} \circ \mathcal{A}$, звідки випливає, що $\mathcal{Z} \circ \mathcal{A}$ є інваріантною максимальною зчепленою системою. Згідно з твердженням 5.3.1, $\mathcal{Z} \circ \mathcal{A}$ є правим нулем і, отже, $\mathcal{Z} \circ \mathcal{A} = \mathcal{Z}$, бо $\mathcal{Z}$ є єдиним правим нулем. Це означає, що $\mathcal{Z}$ є лівим нулем, і будучи правим нулем, нулем в $\lambda(G)$.

(2) $\Rightarrow$ (1) є тривіальною. □

Теорема 5.4.2. *Суперрозширення $\lambda(G)$ групи G має нуль тоді і тільки тоді, коли G є ізоморфною до C_1, C_3 чи C_5.*

Доведення. Якщо G є групою непарного порядку $|G| \leq 5$, то $\overset{\leftrightarrow}{\lambda}(G) \subset \lambda(G)$, бо G є непарною і $|\overset{\leftrightarrow}{\lambda}(G)| = 1$ за теоремою 5.2.8. Це означає, що $\lambda(G)$ містить єдину інваріантну максимальну зчеплену систему, яка є нулем напівгрупи $\lambda(G)$ згідно з твердженням 5.4.1.

Далі, припустимо, що напівгрупа $\lambda(G)$ має нуль $\mathcal{Z}$. Згідно з твердженням 5.3.1 і теоремою 5.3.2, G є непарною і, отже, $\overset{\leftrightarrow}{\lambda}(G) \subset \lambda(G)$. Оскільки нуль $\mathcal{Z}$ напівгрупи $\lambda(G)$ є єдиною інваріантною максимальною зчепленою системою на G, то ми одержуємо, що $|\overset{\leftrightarrow}{\lambda}(G)| \leq 1$. За теоремою 5.2.8, G має порядок $|G| \leq 5$ або є ізоморфною до D_6 або C_2^3. Оскільки G є непарною, то G мусить бути ізоморфною до C_1, C_3 чи C_5. □

5.5. Комутативність напівгруп максимальних зчеплених систем

В цьому підрозділі ми охарактеризуємо групи X, суперрозширення яких комутативні.

Теорема 5.5.1. *Суперрозширення $\lambda(X)$ групи X є комутативним тоді і тільки тоді, коли $|X| \le 4$.*

Доведення. Комутативність суперрозширень $\lambda(X)$ груп X порядку $|X| \le 4$ буде доведена в підрозділі 5.11.

Припустимо, що група X має комутативне суперрозширення $\lambda(X)$. Тоді X є комутативною. Потрібно показати, що $|X| \le 4$. Спершу покажемо, що $|\overset{\leftrightarrow}{\lambda}(X)| = 1$.

Припустимо, що $\overset{\leftrightarrow}{\lambda}(X)$ містить дві різні максимальні інваріантні зчеплені системи $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$. Взявши до уваги, що $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \overset{\leftrightarrow}{\lambda}(X) \subset \overset{\leftrightarrow}{G}(X)$ і кожен елемент множини $\overset{\leftrightarrow}{G}(X)$ є правим нулем в $G(X)$ (див. твердження 4.4.1) ми одержуємо, що

$$\mathcal{A} \circ \mathcal{B} = \mathcal{B} \ne \mathcal{A} = \mathcal{B} \circ \mathcal{A}.$$

Продовжимо зчеплені системи $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ до максимальних зчеплених систем $\tilde{\mathcal{A}} \supset \mathcal{A}$ і $\tilde{\mathcal{B}} \supset \mathcal{B}$. Оскільки $\lambda(X)$ є комутативною, то ми маємо

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} \circ \mathcal{A} \subset \tilde{\mathcal{B}} \circ \tilde{\mathcal{A}} = \tilde{\mathcal{A}} \circ \tilde{\mathcal{B}} \supset \mathcal{A} \circ \mathcal{B} = \mathcal{B}.$$

Звідси випливає, що об'єднання $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \ne \mathcal{A}$ є інваріантною зчепленою системою, що продовжує $\mathcal{A}$. Це суперечить максимальності системи $\mathcal{A}$. Ця суперечність показує, що $|\overset{\leftrightarrow}{\lambda}(X)| = 1$. Використовуючи теорему 5.2.8, одержуємо, що $|X| \le 5$ або X є ізоморфною до C_2^3.

Залишається показати, що напівгрупи $\lambda(C_5)$ і $\lambda(C_2^3)$ не є комутативними. Некомутативність $\lambda(C_5)$ буде доведено в підрозділі 5.11.

Щоб довести, що $\lambda(C_2^3)$ не є комутативною, зафіксуємо довільні три твірні a, b, c групи C_2^3 і розглянемо множини $A = \{e, a, b, abc\}$, $H_1 = \{e, a, b, ab\}$, $H_2 = \{e, a, bc, abc\}$. Відмітимо, що H_1, H_2 є підгрупами в C_2^3. Для кожного $i \in \{1, 2\}$ розглянемо зчеплену систему $\mathcal{A}_i = \langle \{H_1, H_2\} \cup \{xA : x \in H_i\} \rangle$ і продовжимо її до максимальної зчепленої системи $\tilde{\mathcal{A}}_i$ на C_2^3.

Ми стверджуємо, що максимальні зчеплені системи $\tilde{\mathcal{A}}_1$ і $\tilde{\mathcal{A}}_2$ не комутують. Справді,

$$\tilde{\mathcal{A}}_2 \circ \tilde{\mathcal{A}}_1 \ni \bigcup_{x \in H_1} x * (x^{-1}bA) = bA = \{e, b, ba, ac\},$$

$$\tilde{\mathcal{A}}_1 \circ \tilde{\mathcal{A}}_2 \ni \bigcup_{x \in H_2} x * (x^{-1}bcA) = bcA = \{a, c, bc, abc\}.$$

З $bA \cap bcA = \emptyset$ випливає, що $\tilde{\mathcal{A}}_1 \circ \tilde{\mathcal{A}}_2 \neq \tilde{\mathcal{A}}_2 \circ \tilde{\mathcal{A}}_1$. □

5.6. Скоротні елементи в $\lambda(X)$

В цьому підрозділі ми опишемо скоротні елементи напівгрупи $\lambda(X)$.

З формули множення

$$\mathcal{U} \circ \mathcal{V} = \{A \subset X : \{x \in X : x^{-1}A \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}\}, \tag{5.6.1}$$

де $x^{-1}A = \{z \in X : x * z \in A\}$, в напівгрупі $\lambda(X)$ випливає, що добуток $\mathcal{U} \circ \mathcal{V}$ двох максимальних зчеплених систем $\mathcal{U}$ і $\mathcal{V}$ є головним ультрафільтром тоді і тільки тоді, коли одночасно $\mathcal{U}$ і $\mathcal{V}$ є головними ультрафільтрами. Таким чином, ми одержуємо наступне

Твердження 5.6.1. *Для довільної групи X множина $\lambda(X) \setminus X$ є двосторонні́м ідеалом в $\lambda(X)$.*

Твердження 5.6.2. *Нехай X – скінченна група. Якщо $\mathcal{C} \in \lambda(X)$ є скоротним зліва або справа, то $\mathcal{C}$ є головним ультрафільтром.*

Доведення. Припустимо, що деяка максимальна зчеплена система $a \in \lambda(X) \setminus X$ є скоротною зліва. Це означає, що лівий зсув $l_a : \lambda(X) \to \lambda(X)$, $l_a : x \mapsto a \circ x$, є ін'єктивним. Згідно з твердженням 5.6.1, множина $\lambda(X) \setminus X$ є ідеалом в $\lambda(X)$. Отже, $l_a(\lambda(X)) = a \circ \lambda(X) \subset \lambda(X) \setminus X$. Оскільки $\lambda(X)$ є скінченною, то l_a не може бути ін'єктивним. □

Таким чином, напівгрупи $\lambda(X)$ можуть мати нетривіальні скоротні елементи тільки для нескінченних груп X. Згідно з [55, теор. 8.11] ультрафільтр

$\mathcal{U} \in \beta(X)$ є скоротним справа тоді і тільки тоді, коли орбіта $\{x\mathcal{U} : x \in X\}$ є дискретною в $\beta(X)$ тоді і тільки тоді, коли для кожного $x \in X$ існує така множина $U_x \in \mathcal{U}$, що індексована сім'я $\{x * U_x : x \in X\}$ є диз'юнктною.

Ця характеризація володіє частковим узагальненням до напівгрупи $G(X)$. Згідно з твердженням 4.8.1 якщо гіперпростір включення $\mathcal{A} \in G(X)$ є скоротним справа в $G(X)$, то його орбіта $\{x * \mathcal{A} : x \in X\}$ є дискретною в $G(X)$. З другого боку, $\mathcal{A}$ є скоротним за умови, що для кожного $x \in X$ існує така множина $A_x \in \mathcal{A} \cap \mathcal{A}^{\perp}$, що індексована сім'я $\{x * A_x : x \in X\}$ є диз'юнктною. Останнє означає, що $x*A_x \cap y*A_y = \emptyset$ для довільних різних точок $x, y \in X$. Цей результат про скоротні справа елементи напівгрупи $G(X)$ допоможе нам довести подібні теореми про скоротні справа елементи в напівгрупі $\lambda(X)$.

Теорема 5.6.3. *Нехай X є групою і $\mathcal{L} \in \lambda(X)$ – максимальна зчеплена система на X.*

1) *Якщо $\mathcal{L}$ є скоротною справа в $\lambda(X)$, то орбіта $\{x\mathcal{L} : x \in X\}$ є дискретною в $\lambda(X)$ і $x\mathcal{L} \neq y\mathcal{L}$ для всіх $x, y \in X$.*

2) *$\mathcal{L}$ є скоротною справа в $\lambda(X)$, за умови, що для кожного $x \in X$ існує така множина $S_x \in \mathcal{L}$, що сім'я $\{x * S_x : x \in X\}$ є диз'юнктною.*

Доведення. 1. Доведення таке ж як і у випадку напівгрупи $G(X)$.

2. Припустимо, що $\{S_x\}_{x\in X} \subset \mathcal{L}$ є такою сім'єю, що сім'я $\{x * S_x : x \in X\}$ є диз'юнктною. Щоб довести, що $\mathcal{L}$ є скоротною справа, зафіксуємо такі дві максимальні зчеплені системи $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \lambda(X)$, що $\mathcal{A} \circ \mathcal{L} = \mathcal{B} \circ \mathcal{L}$. Досить показати, що $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. Зафіксуємо довільну множину $A \in \mathcal{A}$ і відмітимо, що множина $\bigcup_{a\in A} aS_a$ належить до $\mathcal{A} \circ \mathcal{L} = \mathcal{B} \circ \mathcal{L}$. Таким чином, існує така множина $B \in \mathcal{B}$ і сім'я множин $\{L_b\}_{b\in B} \subset \mathcal{L}$, що

$$\bigcup_{b\in B} bL_b \subset \bigcup_{a\in A} aS_a.$$

З $S_b \in \mathcal{L}$ випливає, що $L_b \cap S_b$ є непорожньою для кожного $b \in B$.

Оскільки множини aS_a і bS_b є неперетинними для різних $a, b \in X$, то з включення

$$\bigcup_{b\in B} b(L_b \cap S_b) \subset \bigcup_{b\in B} bL_b \subset \bigcup_{a\in A} aS_a$$

випливає, що $B \subset A$ і, отже, $A \in \mathcal{B}$. $\square$

Цікаво відмітити, що перший пункт дає необхідну, але не достатню умову скоротності справа в $\lambda(X)$ (на відміну від напівгрупи $\beta(X)$).

Приклад 5.6.4. Згідно з підрозділом 5.11, суперрозширення $\lambda(C_4)$ 4-елементної циклічної групи C_4 ізоморфне до прямого добутку $C_4 \times C_2^1$, де $C_2^1 = C_2 \cup \{e\}$ є 2-елементною циклічною групою з приєднаною зовнішньою одиницею e (останнє означає, що $ex = xe = x$ для всіх $x \in C_2^1$). Таким чином, кожен елемент ідеалу $\lambda(C_4) \setminus C_4$ не є скоротним, але має дискретну 4-елементну орбіту $\{x\mathcal{L} : x \in C_4\}$. Всі скоротні (справа чи зліва) елементи напівгрупи $\lambda(C_4)$ є головними ультрафільтрами, див. твердження 5.6.2.

Згідно з [55, теор. 8.10], для кожної нескінченної групи X напівгрупа $\beta(X)$ містить багато скоротних справа елементів. Зокрема, множина скоротних справа елементів містить відкриту всюди щільну підмножину напівгрупи $\beta(X) \setminus X$. Подібний результат має місце також для напівгрупи $G(X)$ над зліченною групою X: множина скоротних справа елементів в $G(X)$ містить відкриту всюди щільну підмножину піднапівгрупи $G^\circ(X)$. Теорема 5.6.3 допоможе нам довести подібний результат для напівгрупи $\lambda(X)$.

Теорема 5.6.5. *Для кожної зліченної групи X піднапівгрупа $\lambda^\circ(X)$ вільних максимальних зчеплених систем містить відкриту всюди щільну підмножину скоротних справа елементів в напівгрупі $\lambda(X)$.*

Доведення. Нехай $X = \{x_n : n \in \omega\}$ – ін'єктивна нумерація зліченної групи X. Зафіксуємо вільну максимальну зчеплену систему $\mathcal{L} \in \lambda^\circ(X)$ і окіл $O(\mathcal{L})$ системи $\mathcal{L}$ в $\lambda^\circ(X)$. Нам потрібно знайти непорожню відкриту підмножину скоротних справа елементів в $O(\mathcal{L})$. Без втрати загальності можемо вважати, що окіл $O(\mathcal{L})$ є базовим:

$$O(\mathcal{L}) = \lambda^{\circ}(X) \cap U_0^{\pm} \cap \cdots \cap U_{n-1}^{\pm}$$

для деяких підмножин $U_1, \ldots, U_{n-1}$ множини X. Ці множини є нескінченними, бо $\mathcal{L}$ є вільним. Ми збираємось побудувати таку нескінченну множину $C = \{c_n : n \in \omega\} \subset X$, що має нескінченний перетин з множинами U_i, $i < n$, і що для довільних різних елементів $x, y \in X$ перетин $xC \cap yC$ є скінченним. Елементи c_k, $k \in \omega$, з яких складатиметься множина C обиратимемо за індукцією так, щоб виконувалися наступні умови:

- $c_k \in U_j$, де $j = k \mod n$;
- c_k не належить скінченній множині

$$F_k = \{z \in X : \exists i, j \leq k \; \exists l < k \;\; (x_i z = x_j c_l)\}.$$

Очевидно, що побудована таким чином множина $C = \{c_k : k \in \omega\}$ має нескінченний перетин з кожною множиною U_i, $i < n$. З вибору елементів c_k для $k > j$ випливає, що $x_i C \cap x_j C \subset \{x_i c_m : m \leq j\})$ є скінченною.

Нехай $\mathcal{C}$ – вільна максимальна зчеплена система на X, що продовжує зчеплену систему, породжену множинами C і $U_0, \ldots, U_{n-1}$. Очевидно, що $\mathcal{C} \in O(\mathcal{L})$. Розглянемо відкритий окіл

$$O(\mathcal{C}) = O(\mathcal{L}) \cap C^{\pm}$$

системи $\mathcal{C}$ в $\lambda^{\circ}(X)$.

Ми стверджуємо, що кожна максимальна зчеплена система $\mathcal{A} \in O(\mathcal{C})$ є скоротною справа в $\lambda(X)$. Це буде випливати з твердження 5.6.3 як тільки ми побудуємо таку сім'ю множин $\{A_i\}_{i \in \omega} \in \mathcal{A}$, що $x_i A_i \cap x_j A_j = \emptyset$ для довільних чисел $i < j$. Множини A_i, $i \in \omega$, можна визначити за формулами $A_k = C \setminus F_k$, де

$$F_k = \{c \in C : \exists i < k \text{ таке, що } x_k c = x_i C\}$$

є скінченною згідно з вибором множини C.

$\square$

5.7. Топологічний центр суперрозширення $\lambda(X)$

В цьому підрозділі ми опишемо топологічний центр суперрозширення $\lambda(X)$ групи X.

Згідно з твердженнями 4.24 і 6.54 з [55] для кожної групи X топологічний центр напівгрупи $\beta(X)$ збігається з X. З другого боку, топологічний центр напівгрупи $G(X)$ збігається з $G^\bullet(X)$, див. теорему 4.6.1. Подібне твердження має місце і для напівгрупи $\lambda(X)$: топологічний центр напівгрупи $\lambda(X)$ збігається з $\lambda^\bullet(X)$.

Щоб довести цей результат, ми будемо використовувати так звані детекторні ультрафільтри.

Означення 5.7.1. Вільний ультрафільтр $\mathcal{D}$ на групі X називається *детекторним*, якщо існує така індексована сім'я множин $\{D_x : x \in X\} \subset \mathcal{D}$, що для кожної підмножини $A \subset X$

1) множина $U_A = \bigcup_{x\in A} xD_x$ має властивість: $U_A \cup yU_A \neq X$ для всіх $y \in X$;

2) для кожного $D \in \mathcal{D}$ множина $\{x \in X : xD \subset U_A\}$ є скінченною і міститься в A.

Лема 5.7.2. *На кожній зліченній групі X існує детекторний ультрафільтр.*

Доведення. Нехай $X = \{x_n : n \in \omega\}$ – така ін'єктивна нумерація групи X, що x_0 є одиничним елементом групи X. Для кожного $n \in \omega$ покладемо $F_n = \{x_i, x_i^{-1} : i \leq n\}$. Нехай $a_0 = x_0$ і за індукцією, для кожного $n \in \omega$ виберемо елемент $a_n \in X$ так, щоб

$$a_n \notin F_n^{-1} F_n A_{<n}, \quad \text{де} \quad A_{<n} = \{a_i : i < n\}.$$

Для кожного $n \in \omega$ покладемо $A_{\geq n} = \{a_i : i \geq n\}$. Нехай також
$D_0 = \{a_{2i} : i \in \omega\}$.

Покажемо, що для довільних різних чисел n, m перетин $x_nA_{\geq n} \cap x_mA_{\geq m}$ є порожнім. В іншому випадку існували б такі два числа $i \geq n$ і $j \geq m$, що $x_na_i = x_ma_j$. З $x_n \neq x_m$ випливає, що $i \neq j$. Без втрати загальності вважаємо, що $j > i$. Тоді з $x_na_i = x_ma_j$ випливає, що

$$a_j = x_m^{-1}x_na_i \in F_j^{-1}F_jA_{<j},$$

що суперечить вибору a_j.

Нехай $\mathcal{D} \in \beta(X)$ – такий вільний ультрафільтр, що $D_0 \in \mathcal{D}$ і $\mathcal{D}$ не є P-точкою. Щоб одержати такий ультрафільтр, зафіксуємо $\mathcal{D}$ – точку дотику довільної зліченної підмножини $D_0^{\pm} \cap \beta(X) \setminus X$. Оскільки $\mathcal{D}$ не є P-точкою, то ми можемо обрати спадну послідовність множин $\{V_n : n \in \omega\} \subset \mathcal{D}$, що не мають псевдоперетину в $\mathcal{D}$. Останнє означає, що для кожного $D \in \mathcal{D}$ майже включення $D \subset^* V_n$ (яке означає, що $D \setminus V_n$ є скінченною) виконується тільки для скінченної кількості чисел n.

Для кожного $n \in \omega$ покладемо $D_n = V_n \cap A_{\geq n} \cap D_0$. Ми стверджуємо, що ультрафільтр $\mathcal{D}$ і сім'я $(D_n)_{n\in\omega}$ задовольняють умови означення 5.7.1.

Зафіксуємо довільну множину $A \subset \omega$ і розглянемо множину $U_A = \bigcup_{n\in A} x_nD_n$.

Спершу перевіримо, що $U_A \cup yU_A \neq X$ для кожного $y \in X$. Знайдемо такий $m \in \omega$, що $y^{-1} = x_m$ і зафіксуємо довільне непарне число $k > m$. Ми стверджуємо, що $a_k \notin U_A \cup yU_A$. В іншому випадку, $a_k \in x_nD_n \cup x_m^{-1}x_nD_n$ для деякого $n \in A$. Звідси випливає, що $a_k = x_na_i$ або $a_k = x_m^{-1}x_na_i$ для деякого парного $i \geq n$. Якщо $k > i$, то обидві рівності є неможливими згідно з вибором $a_k \notin F_k^{-1}F_kA_{<k} \supset \{x_na_i, x_m^{-1}x_na_i\}$. Якщо $k < i$, то ці рівності не можуть виконуватись згідно з вибором

$$a_i \notin F_i^{-1}F_iA_{<i} \supset \{x_n^{-1}a_k, x_n^{-1}x_m^{-1}a_k\}.$$

Таким чином, $U_A \cup yU_A \neq X$.

Далі, зафіксувавши довільний $D \in \mathcal{D}$ ми покажемо, що множина $S = \{n \in \omega : x_nD \subset U_A\}$ є скінченною і міститься в A. Спершу покажемо, що $S \subset A$. Припустивши протилежне, ми б знайшли $n \in S \setminus A$. Тоді $x_n(D \cap D_n) \subset x_nD \subset$

$U_A = \bigcup_{m \in A} x_m D_m$, що неможливо, бо множина $x_n D_n$ не перетинає об'єднання U_A. Отже, $S \subset A$. Далі, ми покажемо, що S є скінченною. Згідно з вибором послідовності (V_n), множина $F = \{n \in \omega : D \cap D_0 \subset^* V_n\}$ є скінченною. Ми стверджуємо, що $S \subset F$. Справді, зафіксуємо довільний $m \in S$. З $x_m D \subset U_A = \bigcup_{n \in A} x_n D_n$ і $x_m A_{\geq m} \cap \bigcap_{n \neq m} x_n D_n = \emptyset$ випливає, що

$$x_m(D \cap D_0) \subset^* x_m(D \cap A_{\geq m}) \subset x_m D_m \subset x_m V_m$$

і, отже, $m \in F$. □

Теорема 5.7.3. *Нехай X – група, на якій існує детекторний ультрафільтр $\mathcal{D}$. Для максимальної зчепленої системи $\mathcal{A} \in \lambda(X)$ наступні умови рівносильні:*

1) *лівий зсув $L_\mathcal{A} : G(X) \to G(X)$, $L_\mathcal{A} : \mathcal{F} \mapsto \mathcal{A} \circ \mathcal{F}$, є неперервним;*

2) *лівий зсув $l_\mathcal{A} : \lambda(X) \to \lambda(X)$, $l_\mathcal{A} : \mathcal{L} \mapsto \mathcal{A} \circ \mathcal{L}$, є неперервним;*

3) *лівий зсув $l_\mathcal{A} : \lambda(X) \to \lambda(X)$ є неперервним на детекторному ультрафільтрі $\mathcal{D}$;*

4) *$\mathcal{A} \in \lambda^\bullet(X)$.*

Доведення. Імплікації (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) є тривіальними, а (4) $\Rightarrow$ (1) випливає з теореми 4.6.1, яка стверджує, що топологічний центр напівгрупи $G(X)$ збігається з $G^\bullet(X)$. Щоб довести (3) $\Rightarrow$ (4), припустимо, що лівий зсув $l_\mathcal{A} : \lambda(X) \to \lambda(X)$ є неперервним на детекторному ультрафільтрі $\mathcal{D}$.

Потрібно показати, що $\mathcal{A} \in \lambda^\bullet(G)$. За теоремою 3.7.1, досить перевірити, що кожна множина $A \in \mathcal{A}$ містить скінченну множину $F \in \mathcal{A}$.

Оскільки $\mathcal{D}$ є детекторним ультрафільтром, то існує така сім'я множин $\{D_x : x \in X\} \subset \mathcal{D}$, що для кожного $D \in \mathcal{D}$ множина $\{x \in X : xD \subset \bigcup_{a \in A} aD_A\}$ є скінченною і лежить в A.

Розглянемо множину $U_A = \bigcup_{x \in A} xD_x$, що належить добутку $\mathcal{A} \circ \mathcal{D}$. З неперервності лівого зсуву $l_\mathcal{A} : \lambda(X) \to \lambda(X)$ в $\mathcal{D}$ випливає, що існує така множина $D \in \mathcal{D}$, що $l_\mathcal{A}(D^\pm) \subset U_A^\pm$. Це означає, що $U_A \in \mathcal{A} \circ \mathcal{L}$ для довільної максимальної зчепленої системи $\mathcal{L} \in \lambda(X)$, що містить D.

Вибір $\mathcal{D}$ і $\{D_x\}_{x\in X}$ гарантує, що

$$S = \{x \in X : xD \subset U_A\}$$

є скінченною підмножиною, що міститься в A. Ми стверджуємо, що існує така максимальна зчеплена система $\tilde{\mathcal{L}} \in \lambda(X)$, що $D \in \tilde{\mathcal{L}}$ і $x^{-1}U_A \notin \tilde{\mathcal{L}}$ для всіх $x \notin S$. Таку систему $\tilde{\mathcal{L}}$ можна побудувати як продовження зчепленої системи

$$\mathcal{L} = \{D, X \setminus x^{-1}U_A : x \in X \setminus S\}.$$

Остання система є зчепленою згідно з означенням $S = \{x \in X : D \subset x^{-1}U_A\}$ і властивістю (1) сім'ї $(D_x)_{x\in X}$ з означення 5.7.1.

Зафіксуємо довільну максимальну зчеплену систему $\tilde{\mathcal{L}}$, що містить $\mathcal{L}$ і відмітимо, що $D \in \mathcal{L}$ і

$$\{x \in X : x^{-1}U_A \in \tilde{\mathcal{L}}\} = \{x \in X : x^{-1}U_A \in \mathcal{L}\} = S \subset A.$$

Взявши до уваги, що $D \in \mathcal{L}$, одержуємо, що $\mathcal{A}\circ\mathcal{L} = l_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}) \in U_A^{\pm}$ і, отже, множина $S = \{x \in X : x^{-1}U_A \in \mathcal{L}\} \in \mathcal{A}$. Ця множина S є скінченною підмножиною множини A, що належить до $\mathcal{A}$. $\square$

Комбінуючи теорему 5.7.3 з лемою 5.7.2, одержуємо основний результат цього підрозділу.

Теорема 5.7.4. *Для довільної зліченної групи X топологічний центр напівгрупи $\lambda(X)$ збігається з $\lambda^\bullet(X)$.*

5.8. Алгебраїчний центр напівгрупи $\lambda(X)$

Цей підрозділ присвячується вивченню алгебраїчного центру напівгрупи $\lambda(X)$.

Лема 5.8.1. *Нехай X – група з одиничним елементом e. Максимальна зчеплена система $\mathcal{A} \in \lambda(X)$ не є центральною в $\lambda(X)$ за умови, що існують такі множини $S, T \subset X$, що*

1) $|T| = 3$;

2) *для кожного* $A \in \mathcal{A}$ *маємо* $A \cap S \in \mathcal{A}$ *і* $|A \cap S| \geq 2$;

3) *існує така скінченна множина* $B \in \mathcal{A}$, *що* $BS^{-1} \cap T^{-1}T \subset \{e\}$.

Доведення. Ми стверджуємо, що $\mathcal{A}$ не комутує з максимальною зчепленою системою $\mathcal{T} = \{A \subset X : |A \cap T| \geq 2\}$. Згідно з (3), максимальна зчеплена система $\mathcal{A}$ містить таку скінченну множину $B \in \mathcal{A}$, що $BS^{-1} \cap TT^{-1} \subset \{e\}$. Згідно пункту (2), ми можемо вважати, що $B \subset S$ і B є мінімальною в тому розумінні, що кожна така множина $B' \subset B$, що $B' \in \mathcal{A}$ збігається з B. Згідно з (2), $|B| \geq 2$.

Оберемо таку сім'ю $\{T_b\}_{b \in B}$ 2-елементних підмножин множини T, що $\bigcup_{b \in B} T_b = T$. Такий вибір можливий, оскільки $|B| \geq 2$.

Об'єднання $\bigcup_{b \in B} bT_b$ належить до $\mathcal{A} \circ \mathcal{T} = \mathcal{T} \circ \mathcal{A}$ і, отже, ми можемо знайти таку підмножину $D \in \mathcal{T}$ і сім'ю $\{A_d\}_{d \in D} \subset \mathcal{A}$, що $\bigcup_{d \in D} dA_d \subset \bigcup_{b \in B} bT_b$. Згідно з пунктом (2), можна вважати, що кожна множина $A_d \subset S$. Замінивши D меншою множиною, якщо необхідно, вважаємо, що $D \subset T$ і $|D| = 2$. Ми стверджуємо, що $A_d = B$ для всіх $d \in D$ і $T_b = D$ для всіх $b \in B$.

Справді, зафіксуємо довільний $d \in D$ і довільний $a \in A_d$. Оскільки $da \in \bigcup_{x \in D} xA_x \subset \bigcup_{b \in B} bT_b$, то існує такий $b \in B$ і $t \in T_b$, що $da = bt$. Тоді $T^{-1}T \ni t^{-1}d = ba^{-1} \in BA_d^{-1} \subset BS^{-1}$. Взявши до уваги, що $T^{-1}T \cap BS^{-1} \subset \{e\}$, одержуємо, що $t^{-1}d = ba^{-1}$ є одиничним елементом групи X. Таким чином, $a = b \in B$ і $d = t \in T_b$. Оскільки $a \in A_d$ обирався довільно, то ми одержуємо $\mathcal{A} \ni A_d \subset B$. З мінімальності $B \in \mathcal{A}$ випливає, що $A_d = B$. З того, що $d = t \in T_b$ для $d \in D$ випливає, що $D \subset T_b$. Оскільки $|D| = |T_b| = 2$, то ми одержуємо, що $D = T_b$ для кожного $b \in B = A_d$. Отже, $D = \bigcup_{b \in B} T_b = T$, що суперечить (1). $\square$

Згідно з теоремою 6.54 з [55], для кожної групи X алгебраїчний центр напівгрупи $\beta(X)$ збігається з центром групи X. Таким чином, напівгрупа $\beta(X) \setminus X$ не містить центральних елементів. Подібний результат виконується також для напівгрупи $\lambda(X)$.

Теорема 5.8.2. *Для кожної зліченної нескінченної групи X алгебраїчний центр напівгрупи $\lambda(X)$ збігається з алгебраїчним центром групи X.*

Доведення. Очевидно, що всі центральні елементи групи X є центральними в $\lambda(X)$. Припустимо, що максимальна зчеплена система $\mathcal{C} \in \lambda(X)$ є центральним елементом напівгрупи $\lambda(X)$. Відмітимо, що лівий зсув $l_\mathcal{C} : \lambda(X) \to \lambda(X)$, $l_\mathcal{C} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{C} \circ \mathcal{X}$ є неперервним, бо збігається з правим зсувом $r_\mathcal{C} : \lambda(X) \to \lambda(X)$, $r_\mathcal{C} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{X} \circ \mathcal{C}$. Таким чином, $\mathcal{C}$ належить до топологічного центру $\lambda(X)$. Застосовуючи теорему 5.7.4, одержуємо, що $\mathcal{C} \in \lambda^\bullet(X)$. Ми стверджуємо, що $\mathcal{A}$ є головним ультрафільтром.

Припустивши протилежне, розглянемо сім'ю $\mathcal{C}_0$ мінімальних скінченних підмножин в $\mathcal{C}$. Оскільки $\mathcal{C} \in \lambda^\bullet(X)$, то сім'я $\mathcal{C}_0$ є скінченною і, отже, має скінченне об'єднання $S = \cup\mathcal{C}_0$. Зафіксуємо довільну множину $B \in \mathcal{C}_0$ і відмітимо, що $|B| \geq 2$ (бо $\mathcal{C}$ не є головним ультрафільтром).

Оскільки група X є нескінченною, то ми можемо обрати таку 3-елементну підмножину $T \subset X$, що $T^{-1}T \cap BS^{-1} \subset \{e\}$. Далі, бачимо, що максимальна зчеплена система $\mathcal{C}$ задовольняє умови леми 5.8.1 і, отже, не є центральною в $\lambda(X)$, що є суперечністю. □

Цікаво відмітити, що напівгрупа $\lambda(X)$ містить багато неголовних максимальних зчеплених систем, що комутують з усіма ультрафільтрами.

Твердження 5.8.3. *Нехай X – група і $Y, Z \subset X$ – такі непорожні підмножини, що $yz = zy$ для всіх $y \in Y$, $z \in Z$. Тоді для кожної $\mathcal{L} \in \lambda^\bullet(Y) \subset \lambda^\bullet(X)$ і $\mathcal{U} \in \beta(Z) \subset \beta(X)$ маємо, що $\mathcal{L} \circ \mathcal{U} = \mathcal{U} \circ \mathcal{L}$.*

Доведення. Достатньо довести, що $\mathcal{L} \circ \mathcal{U} \subset \mathcal{U} \circ \mathcal{L}$. Нехай $\bigcup_{x \in L} x * U_x \in \mathcal{L} \circ \mathcal{U}$. Без втрати загальності ми можемо вважати, що $L = \{x_1, \dots, x_n\}$ є скінченною, $L \subset Y$ і $U_{x_i} \subset Z$. Позначимо через $V = U_{x_1} \cap \dots \cap U_{x_n} \in \mathcal{U}$. Тоді

$$\bigcup_{x \in L} x * U_x = \bigcup_{x \in L} U_x * x \supset V * L \in \mathcal{U} \circ \mathcal{L}.$$

Звідси випливає, що $\bigcup_{x \in L} x * U_x \in \mathcal{U} \circ \mathcal{L}$ і твердження доведено. □

5.9. Мінімальний ідеал суперрозширення $\lambda(G)$ непарних груп G

В цьому підрозділі ми охарактеризуємо групи G, суперрозширення $\lambda(G)$ яких містять одноточкові мінімальні ліві ідеали.

Якщо G – скінченна непарна група, то максимальна зчеплена система

$$\mathcal{L} = \{A \subset G : |A| > |G|/2\}$$

є інваріантною. Більш точно, група G володіє інваріантною максимальною зчепленою системою тоді і тільки тоді, коли G – непарна, див. теорему 5.3.2. Максимальна зчеплена система $\mathcal{Z} \in \lambda(G)$ на групі G є інваріантною тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{Z}$ є правим нулем напівгрупи $\lambda(G)$ тоді і тільки тоді, коли одноточкова множина $\{\mathcal{Z}\}$ є мінімальним лівим ідеалом в $\lambda(G)$. Взявши до уваги, що інваріантні максимальні зчеплені системи утворюють піднапівгрупу правих нулів напівгрупи $\lambda(G)$, одержуємо основний результат цього підрозділу.

Теорема 5.9.1. *Група G є непарною тоді і тільки тоді, коли всі мінімальні ліві ідеали напівгрупи $\lambda(G)$ є одноточковими множинами. В цьому випадку мінімальний ідеал $K(\lambda(G))$ напівгрупи $\lambda(G)$ є замкненою напівгрупою правих нулів, що містить всі інваріантні максимальні зчеплені системи.*

Для підгрупи H групи G покладемо $G/H = \{xH : x \in G\}$ і через $\pi : G \to G/H$ позначимо природну сюр'єкцію. Вона породжує неперервне відображення $\lambda\pi : \lambda(G) \to \lambda(G/H)$ між відповідними суперрозширеннями.

Лема 5.9.2. *Для кожної H-інваріантної максимальної зчепленої системи $\mathcal{A} \in \lambda(H) \subset \lambda(G)$ обмеження $\lambda\pi : \lambda(G) \to \lambda(G/H)$ на головний ідеал $\lambda(G)\circ\mathcal{A}$ є ін'ективним.*

Доведення. Зафіксуємо селекцію $s : G/H \to G$ відображення π. Для кожної $\mathcal{L} \in \lambda(G)$ покладемо $\widetilde{\mathcal{L}} = \lambda\pi(\mathcal{L}) \in \lambda(G/H)$ і $\mathcal{M} = \lambda s(\widetilde{\mathcal{L}}) \in \lambda(G)$.

Ми стверджуємо, що $\mathcal{L}\circ\mathcal{A} = \mathcal{M}\circ\mathcal{A}$. Оскільки $\mathcal{L}\circ\mathcal{A}$ і $\mathcal{M}\circ\mathcal{A}$ є максимальними зчепленими системами, то достатньо перевірити, що $\mathcal{L}\circ\mathcal{A} \subset \mathcal{M}\circ\mathcal{A}$. Зафіксуємо довільну множину $\bigcup_{x\in L} x * A_x \in \mathcal{L}\circ\mathcal{A}$, де $L\in\mathcal{L}$ і $\{A_x\}_{x\in L}\subset\mathcal{A}$. Розглянемо множину $M = s\circ\pi(L)\in\mathcal{M}$. Для кожної точки $y\in M$ знайдемо таку точку $x_y\in L$, що $y = s\pi(x_y)$ і відмітимо, що $yH = \pi(y) = \pi(x_y) = x_yH$, звідки слідує, що $y^{-1}x_y\in H$ і, отже, $y^{-1}x_yA_{x_y}\in\mathcal{A}$, оскільки $\mathcal{A}$ – H-інваріантна. Оскільки

$$\mathcal{M}\circ\mathcal{A}\ni\bigcup_{y\in M} y(y^{-1}x_y * A_{x_y}) = \bigcup_{y\in M} x_y * A_{x_y}\subset\bigcup_{x\in L} x * A_x,$$

то ми одержуємо, що $\bigcup_{x\in L} x * A_x\in\mathcal{M}\circ\mathcal{A}$.

Далі, доведемо, що відображення $\lambda\pi:\lambda(G)\circ\mathcal{A}\to\lambda(G/H)$ є ін'єктивним. Зафіксуємо два довільні елементи $\mathcal{L}_1\circ\mathcal{A}\neq\mathcal{L}_2\circ\mathcal{A}$ множини $\lambda(G)\circ\mathcal{A}$. Для кожного $i\in\{1,2\}$ розглянемо максимальні зчеплені системи $\widetilde{\mathcal{L}}_i = \lambda\pi(\mathcal{L}_i) = \lambda\pi(\mathcal{L}_i\circ\mathcal{A})$ і $\mathcal{M}_i = \lambda s(\widetilde{\mathcal{L}}_i)$. З нерівності $\mathcal{M}_1\circ\mathcal{A} = \mathcal{L}_1\circ\mathcal{A}\neq\mathcal{L}_2\circ\mathcal{A} = \mathcal{M}_2\circ\mathcal{A}$ випливає, що $\mathcal{M}_1\circ\mathcal{A}\neq\mathcal{M}_2\circ\mathcal{A}$ і, отже,

$$\lambda\pi(\mathcal{L}_1\circ\mathcal{A}) = \widetilde{\mathcal{L}}_1\neq\widetilde{\mathcal{L}}_2 = \lambda\pi(\mathcal{L}_2\circ\mathcal{A}).$$

□

Наслідок 5.9.3. *Для нормальної непарної підгрупи H групи G відображення $\lambda\pi:\lambda(G)\to\lambda(G/H)$ є ін'єктивним на кожному мінімальному лівому ідеалі напівгрупи $\lambda(G)$. Таким чином, кожен мінімальний лівий ідеал напівгрупи $\lambda(G)$ є топологічно ізоморфним до мінімального лівого ідеалу напівгрупи $\lambda(G/H)$.*

Доведення. Згідно з лемою 2.2.1, достатньо показати, що $\lambda\pi$ є ін'єктивним на деякому мінімальному лівому ідеалі. Оскільки група H є непарною, то вона володіє H-інваріантною максимальною зчепленою системою $\mathcal{A}\in\lambda(H)\subset\lambda(G)$. За лемою 5.9.2 гомоморфізм $\lambda\pi$ є ін'єктивним на лівому ідеалі $\lambda(G)\circ\mathcal{A}$ і, отже, є ін'єктивним на кожному мінімальному лівому ідеалі, що міститься в $\lambda(G)\circ\mathcal{A}$ (він існує, оскільки $\lambda(G)$ є компактною правотопологічною напівгрупою). □

5.10. Мінімальні ліві ідеали напівгрупи $\lambda(\mathbb{Z})$

В цьому підрозділі ми використаємо результати попередніх підрозділів, щоб описати структуру мінімальних лівих ідеалів напівгрупи $\lambda(\mathbb{Z})$. Виявляється, що вони ізоморфні до мінімальних лівих ідеалів суперрозширення $\lambda(\mathbb{Z}_2)$ компактної топологічної групи $\mathbb{Z}_2$ цілих двоадичних чисел. Нагадаємо, що $\mathbb{Z}_2 = \varprojlim C_{2^k}$ є цілком незв'язною компактною метризовною абелевою групою, яка є границею оберненої послідовності

$$\cdots \to C_{2^n} \to \cdots \to C_8 \to C_4 \to C_2$$

циклічних 2-груп C_{2^n}. Через $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$ позначимо канонічний (ін'єктивний) гомоморфізм з $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}_2$ (породжений фактор-відображеннями $\pi_{2^k} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z} = C_{2^k}$, $k \in \mathbb{N}$).

За неперервністю функтора λ в категорії компактів (див. [66, тв. 2.3.2]), суперрозширення $\lambda(\mathbb{Z}_2)$ можна ототожнити з границею оберненої послідовності

$$\cdots \to \lambda(C_{2^n}) \to \cdots \to \lambda(C_8) \to \lambda(C_4) \to \lambda(C_2)$$

скінченних напівгруп $\lambda(C_{2^k})$. Звідси випливає, що $\lambda(\mathbb{Z}_2)$ є метризовною нульвимірною компактною топологічною напівгрупою.

Теорема 5.10.1. *Гомоморфізм $\lambda\pi : \lambda(\mathbb{Z}) \to \lambda(\mathbb{Z}_2)$ є ін'єктивним на кожному мінімальному лівому ідеалі суперрозширення $\lambda(\mathbb{Z})$. Таким чином, мінімальні ліві ідеали напівгрупи $\lambda(\mathbb{Z})$ є компактними метризовними топологічними напівгрупами.*

Доведення. Згідно леми 2.2.1, достатньо перевірити, що гомоморфізм $\lambda\pi$ є ін'єктивним на деякому мінімальному лівому ідеалі суперрозширення $\lambda(\mathbb{Z})$. Зафіксуємо довільну максимальну інваріантну зчеплену систему $\mathcal{L}_0$ на $\mathbb{Z}$ (така система існує за лемою Цорна). Згідно з твердженням 5.2.1 множина $\uparrow\mathcal{L}_0 = \{\mathcal{L} \in \lambda(\mathbb{Z}) : \mathcal{L} \supset \mathcal{L}_0\}$ є лівим ідеалом, який містить мінімальний лівий ідеал I суперрозширення $\lambda(\mathbb{Z})$. Ми стверджуємо, що гомоморфізм $\lambda\pi : \lambda(\mathbb{Z}) \to \lambda(\mathbb{Z}_2)$ є ін'єктивним на I. Зафіксуємо дві різні максимальні зчеплені системи $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in I$ і перевіримо, що $\lambda\pi(\mathcal{A}) \neq \lambda\pi(\mathcal{B})$.

Оскільки суперрозширення $\lambda(\mathbb{Z}_2)$ є границею оберненої послідовності

$$\cdots \to \lambda(C_{2^n}) \to \cdots \to \lambda(C_8) \to \lambda(C_4) \to \lambda(C_2),$$

то нерівність $\lambda\pi(\mathcal{A}) \neq \lambda\pi(\mathcal{B})$ буде виконуватися як тільки ми знайдемо таке $k \in \mathbb{N}$, що $\lambda\pi_{2^k}(\mathcal{A}) \neq \lambda\pi_{2^k}(\mathcal{B})$, де $\lambda\pi_{2^k} : \lambda(\mathbb{Z}) \to \lambda(C_{2^k})$ є гомоморфізмом, індукованим фактор-гомоморфізмом $\pi_{2^k} : \mathbb{Z} \to C_{2^k}$.

Оберемо довільну множину $A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$. Оскільки $A \in \mathcal{L}_0^{\perp} \setminus \mathcal{L}_0$, то згідно теореми 5.2.2 ми одержуємо, що $A = 2n + A$, для деякого додатнього числа $n \in \mathbb{Z}$. Остання рівність означає, що $A = \pi_{2n}^{-1}(\pi_{2n}(A))$ є повним прообразом множини $\pi_{2n}(A)$ відносно фактор-гомоморфізму $\pi_{2n} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z} = C_{2n}$. Звідси випливає, що $\pi_{2n}(A) \in \lambda\pi_{2n}(\mathcal{A}) \setminus \lambda\pi_{2n}(\mathcal{B})$ і, отже, $\lambda\pi_{2n}(\mathcal{A}) \neq \lambda\pi_{2n}(\mathcal{B})$.

Запишемо число $2n$ як добуток $2n = 2^k \cdot m$ для деякого непарного числа m і знайдемо (єдину) підгрупу $H \subset C_{2n}$ порядку $|H| = m$. Фактор-групу C_{2n}/H можна ототожнити з циклічною 2-групою C_{2^k} так, що $q \circ \mathrm{pr}_{2n} = \mathrm{pr}_{2^k}$, де $q : C_{2n} \to C_{2n}/H = C_{2^k}$ є природнім фактор-гомоморфізмом. Наслідок 5.9.3 гарантує, що гомоморфізм $\lambda q : \lambda(C_{2n}) \to \lambda(C_{2^k})$ є ін'єктивним на кожному мінімальному лівому ідеалі суперрозширення $\lambda(C_{2n})$. Зокрема, він є ін'єктивним на мінімальному лівому ідеалі $\lambda\pi_{2n}(I)$. Таким чином, $\lambda\,\mathrm{pr}_{2^k}(\mathcal{A}) = \lambda q(\tilde{\mathcal{A}}) \neq \lambda q(\tilde{\mathcal{B}}) = \lambda\,\mathrm{pr}_{2^k}\,\mathcal{B})$. Цим і завершується доведення ін'єктивності відображення $\lambda\pi : \lambda(\mathbb{Z}) \to \lambda(\mathbb{Z}_2)$ на лівому ідеалі I і, отже, на кожному мінімальному лівому ідеалі J суперрозширення $\lambda(\mathbb{Z})$.

Оскільки мінімальні ліві ідеали суперрозширення $\lambda(\mathbb{Z})$ є компактними, то обмеження $\lambda\pi|J$ є топологічним ізоморфізмом з J на мінімальний лівий ідеал $\lambda\pi(J)$ суперрозширення $\lambda(\mathbb{Z}_2)$. Оскільки $\lambda(\mathbb{Z}_2)$ є метризовною топологічною напівгрупою, то такими є напівгрупи $\lambda\pi(J)$ та J. □

Мінімальні ліві ідеали напівгрупи $\beta^\circ(\mathbb{Z})$ вільних ультрафільтрів відіграють важливу роль в комбінаториці чисел, див. [55]. Ми сподіваємося, що подібне буде виконуватися і для напівгрупи $\lambda^\circ(\mathbb{Z})$ вільних максимальних зчеплених систем. З наступного твердження випливає, що мінімальні ліві ідеали $\lambda^\circ(\mathbb{Z})$ не містять ультрафільтрів!

Твердження 5.10.2. *Якщо для напівгрупи X існує такий гомоморфізм $h : X \to C_3$, що для кожного $y \in C_3$ прообраз $h^{-1}(y)$ є непорожнім (нескінченним), то кожен мінімальний лівий ідеал I напівгрупи $\lambda(X)$ ($\lambda^\circ(X)$) не перетинається з $\beta(X)$.*

Доведення. Індуковане відображення $\lambda h : \lambda(X) \to \lambda(C_3)$ є сюр'єктивним гомоморфізмом. Отже, $\lambda h(I)$ є мінімальним лівим ідеалом в $\lambda(C_3)$. Відмітимо, що $\lambda(C_3)$ містить чотири максимальні зчеплені системи. Крім трьох ультрафільтрів, існує максимальна зчеплена система $\mathcal{L}_\Delta = \langle\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\}\rangle$, де $C_3 = \{0,1,2\}$. Легко перевірити, що $\{\mathcal{L}_\Delta\}$ є нулем напівгрупи $\lambda(C_3)$. Таким чином, $\lambda(h)(I) = \{\mathcal{L}_\Delta\}$, звідки випливає, що $I \cap \beta(X) = \emptyset$.

Далі, припустимо, що для кожного $y \in C_3$ прообраз $h^{-1}(y)$ є нескінченним. Ми стверджуємо, що $\lambda h(\lambda^\circ(X)) = \lambda(C_3)$. Розглянемо довільну максимальну зчеплену систему $\mathcal{L} \in \lambda(C_3)$. Якщо $\mathcal{L}$ є ультрафільтром, породженим точкою $y \in C_3$, то ми можемо взяти довільний вільний ультрафільтр $\mathcal{U}$ на X, що містить нескінченну множину $h^{-1}(y)$ і одержимо, що $\lambda h(\mathcal{U}) = \mathcal{L}$. Залишається розглянути випадок $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\Delta$. Зафіксуємо вільні ультрафільтри $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ на X, що містять множини $h^{-1}(0)$, $h^{-1}(1)$, $h^{-1}(2)$, відповідно. Тоді $\mathcal{L} = (\mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_1) \cup (\mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_2) \cup (\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)$ є вільною максимальною зчепленою системою, образ якої $\lambda h(\mathcal{L}_X) = \mathcal{L}_\Delta$.

Розглянемо довільний мінімальний лівий ідеал $I \subset \lambda^\circ(X)$. Образ $\lambda h(I)$ є мінімальним лівим ідеалом $\lambda(C_3)$, збігається з $\{\mathcal{L}_\triangle\}$ і не перетинається з $\beta(C_3)$. Таким чином, I не перетинає $\beta(X)$. □

5.11. Суперрозширення скінченних груп

В цьому підрозділі ми опишемо структуру суперрозширень $\lambda(G)$ скінченних груп G малих порядків (більш точно, порядків $|G| \le 5$). Відомо, що потужність $\lambda(G)$ дуже швидко зростає, коли $|G|$ прямує до безмежності. Обчислення потужності $|\lambda(G)|$ є дуже складною комбінаторною проблемою, що тісно пов'язана з досі не розв'язаною проблемою Дедекінда про обчислення кількості $M(n)$ гіперпросторів включення на n-елементній множині, див. [39]. Ми обчислили потужність $\lambda(G)$ тільки для груп G порядку $|G| \leq 6$. Результати (комп'ютерних) підрахунків подано в наступній таблиці:

Таблиця 5.1

Потужності суперрозширення $\lambda(G)$ для груп G порядку $|G| \leq 6$

$\lvert G\rvert$	1	2	3	4	5	6
$\lvert\lambda(G)\rvert$	1	2	4	12	81	2646
$\lvert\lambda(G)/G\rvert$	1	1	2	3	17	447

Далі, ми проаналізуємо вміст вищенаведеної таблиці. Спершу відмітимо, що кожна група G порядку $|G| \leq 5$ є абелевою і ізоморфною до однієї з груп: C_1, C_2, C_3, C_4, $C_2 \oplus C_2$, C_5. В подальшому буде зручно уявляти циклічну групу C_n як мультиплікативну підгрупу $\{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$ комплексної площини.

5.11.1. Напівгрупи $\lambda(C_1)$ і $\lambda(C_2)$. Для груп C_n, де $n \in \{1, 2\}$, напівгрупа $\lambda(C_n)$ збігається з C_n, а напівгрупа орбіт $\lambda(C_n)/C_n$ є тривіальною.

5.11.2. Напівгрупа $\lambda(C_3)$. Для групи C_3 напівгрупа $\lambda(C_3)$ містить три головні ультрафільтри $1, z, -z$, де $z = e^{2\pi i/3}$ і максимальну зчеплену систему $\triangleright = \langle\{1, z\}, \{1, -z\}, \{z, -z\}\rangle$, яка є нулем в $\lambda(C_3)$. Суперрозширення $\lambda(C_3)$ ізоморфне до мультиплікативної напівгрупи $C_3^0 = \{z \in \mathbb{C} : z^4 = z\}$ комплексної площини. Остання напівгрупа містить нуль 0 і одиницю 1, які є єдиними ідемпотентами.

Трансверсальна напівгрупа $\lambda(C_3)/C_3$ ізоморфна до напівґратки $2 = \{0, 1\}$, наділеної min-операцією.

5.11.3. Напівгрупи $\lambda(C_4)$ і $\lambda(C_2 \oplus C_2)$. Напівгрупа $\lambda(C_4)$ містить 12 елементів, а напівгрупа орбіт $\lambda(C_4)/C_4$ містить 3 елементи. Напівгрупа $\lambda(C_4)$

містить трансверсальну напівгрупу $\lambda_T(C_4) = \{1, \triangle, \square\}$, де 1 є одиничним елементом групи $C_4 = \{1, -1, i, -i\}$,

$$\triangle = \langle \{1, i\}, \{1, -i\}, \{i, -i\} \rangle \text{ і}$$

$$\square = \langle \{1, i\}, \{1, -i\}, \{1, -1\}, \{i, -i, -1\} \rangle.$$

Трансверсальна напівгрупа $\lambda_T(C_4)$ є ізоморфною до розширення $C_2^1 = C_2 \cup \{e\}$ циклічної групи C_2 зовнішньою одиницею $e \notin C_2$ (такою, що $ex = x = xe$ для всіх $x \in C_2^1$). Дія групи C_4 на $\lambda(C_4)$ є вільною, отже, $\lambda(C_4)$ ізоморфна до $\lambda_T(C_4) \oplus C_4$.

Напівгрупа $\lambda(C_2 \oplus C_2)$ має подібну алгебраїчну структуру. Вона містить трансверсальну напівгрупу $\lambda_T(C_2 \oplus C_2) = \{e, \triangle, \square\} \subset \lambda(C_2 \oplus C_2)$, де e є головним ультрафільтром, породженим нейтральним елементом $(1, 1)$ групи $C_2 \oplus C_2$, а максимальні зчеплені системи $\triangle$ і $\square$ визначені аналогічно як і у випадку групи C_4:

$$\triangle = \langle \{(1, 1), (1, -1)\}, \{(1, 1), (-1, 1)\}, \{(1, -1), (-1, 1)\} \rangle \text{ і}$$

$$\square = \langle \{(1, 1), (1, -1)\}, \{(1, 1), (-1, 1)\}, \{(1, 1), (-1, -1)\}, \{(1, -1), (-1, 1), (-1, -1)\} \rangle.$$

Трансверсальна напівгрупа $\lambda_T(C_2 \oplus C_2)$ ізоморфна до C_2^1, а $\lambda(C_2 \oplus C_2)$ є ізоморфною до $C_2^1 \oplus C_2 \oplus C_2$.

Ми підсумовуємо одержані результати про структуру напівгруп $\lambda(C_4)$ і $\lambda(C_2 \oplus C_2)$ в наступному твердженні.

Твердження 5.11.1. *Нехай G – група порядку $|G| = 4$.*

1) *Напівгрупа $\lambda(G)$ є ізоморфною до $C_2^1 \oplus G$ і, отже, комутативною;*
2) *$\lambda(G)$ містить два ідемпотенти;*
3) *$\lambda(G)$ має єдиний власний ідеал $\lambda(G) \setminus G$, ізоморфний до групи $C_2 \oplus G$.*

5.11.4. Напівгрупа $\lambda(C_5)$. На відміну від $\lambda(C_4)$, напівгрупа $\lambda(C_5)$ має складну алгебраїчну структуру. Вона містить 81 елемент. Одним з них є нуль

$$\mathcal{Z} = \{A \subset C_5 : |A| \geq 3\},$$

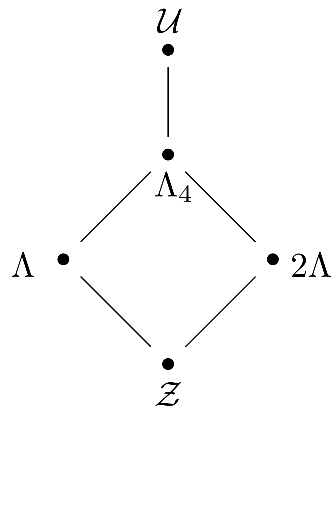
який є інваріантний відносно бієкцій на C_5. Решту 80 елементів мають 5-елементні орбіти відносно дії групи C_5, звідки випливає, що напівгрупа орбіт $\lambda(C_5)/C_5$ містить 17 елементів. Через $\pi : \lambda(C_5) \to \lambda(C_5)/C_5$ позначимо проекцію.

В подальшому буде зручно уявляти C_5 як поле $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ з мультиплікативною підгрупою $C_5^* = \{1, -1, 2, -2\}$ оборотних елементів (тут -1 і -2 ототожнюються з 4 і 3, відповідно). Для елементів $x, y, z \in C_5$ будемо записувати xyz замість $\{x, y, z\}$.

Напівгрупа $\lambda(C_5)$ містить 5 ідемпотентів:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} =& \langle 0 \rangle,\ \mathcal{Z}, \\ \Lambda_4 =& \langle 01, 02, 03, 04, 1234 \rangle, \\ \Lambda =& \langle 02, 03, 123, 014, 234 \rangle, \\ 2\Lambda =& \langle 04, 01, 124, 023, 143 \rangle, \end{aligned}$$

що комутують і, отже, утворюють абелеву піднапівгрупу $E(\lambda(C_5))$. Оскільки $E(\lambda(C_5))$ є ґраткою, то вона має природній частковий порядок: $e \le f$ тоді і тільки тоді, коли $e \circ f = e$. Частковий порядок $\mathcal{Z} \le \Lambda, 2\Lambda \le \Lambda_4 \le \mathcal{U}$ на множині $E(\lambda(C_5))$ подано на малюнку:



Іншою важливою підмножиною напівгрупи $\lambda(C_5)$ є

$$\begin{aligned} \sqrt{E(\lambda(C_5))} =& \{\mathcal{L} \in \lambda(C_5) : \mathcal{L} \circ \mathcal{L} \in E(\lambda(C_5))\} = \\ =& \{\mathcal{L} \in \lambda(C_5) : \mathcal{L} \circ \mathcal{L} \circ \mathcal{L} \circ \mathcal{L} = \mathcal{L} \circ \mathcal{L}\}. \end{aligned}$$

Ми покажемо, що ця підмножина містить точку з кожної 5-елементної орбіти в $\lambda(C_5)$.

Спершу покажемо, що ця підмножина має не більш ніж одноточковий перетин з кожною орбітою. Справді, якщо $\mathcal{L} \in \sqrt{E(\lambda(C_5))}$ і $\mathcal{L} \circ \mathcal{L} \neq \mathcal{Z}$, то для кожного $a \in C_5 \setminus \{0\}$ одержуємо

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}+a)\circ(\mathcal{L}+a)\circ(\mathcal{L}+a)\circ(\mathcal{L}+a) &= \mathcal{L}\circ\mathcal{L}\circ\mathcal{L}\circ\mathcal{L}+4a = \\ &= \mathcal{L}\circ\mathcal{L}+4a \neq \mathcal{L}\circ\mathcal{L}+2a = (\mathcal{L}+a)\circ(\mathcal{L}+a),\end{aligned}$$

звідки і випливає, що $\mathcal{L}+a \notin \sqrt{E(\lambda(C_5))}$.

Прямим обчисленням легко перевірити, що множина $\sqrt{E(\lambda(C_5))}$ містить наступні чотири максимальні зчеплені системи:

$$\begin{aligned}\Delta =&\langle 02, 03, 23\rangle,\\ \Lambda_3 =&\langle 02, 03, 04, 234\rangle,\\ \Theta =&\langle 14, 012, 013, 123, 024, 034, 234\rangle,\\ \Gamma =&\langle 02, 04, 013, 124, 234\rangle.\end{aligned}$$

Для цих систем ми маємо

$$\begin{aligned}&\Delta\circ\Delta = \Delta\circ\Delta\circ\Delta = \Lambda,\\ &\Lambda_3\circ\Lambda_3 = \Lambda_3\circ\Lambda_3\circ\Lambda_3 = \Lambda,\\ &\mathcal{F}\circ\Theta = \mathcal{F}\circ\Gamma = \mathcal{Z} \text{ для кожного } \mathcal{F}\in\lambda(C_5)\setminus C_5.\end{aligned}$$

Інші елементи $\lambda(C_5)$ можна знайти як образи $\Delta, \Theta, \Gamma, \Lambda_3$ під дією афінних перетворень поля C_5. Це є відображення виду

$$f_{a,b} : x \mapsto ax + b \mod 5,$$

де $a \in \{1, -1, 2, -2\} = C_5^*$ і $b \in C_5$. Образ максимальної зчепленої системи $\mathcal{L} \in \lambda(C_5)$ під дією таких перетворень будемо позначати як $a\mathcal{L} + b$.

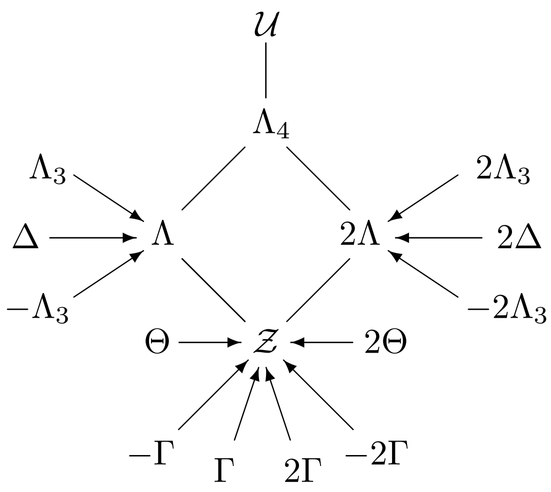
Легко перевірити, що $a\Lambda_4 = \Lambda_4$ для кожного $a \in C_5^*$, тоді як $\Lambda = -\Lambda$ і $\Theta = -\Theta$. Оскільки лінійні перетворення виду $f_{a,0} : C_5 \to C_5$, $a \in C_5^*$, є автоморфізмами групи C_5, то індуковані перетворення $\lambda f_{a,0} : \lambda(C_5) \to \lambda(C_5)$ є автоморфізмами напівгрупи $\lambda(C_5)$. Звідси випливає, що ці перетворення залишають нерухомими підмножини $E(\lambda(C_5))$ і $\sqrt{E(\lambda(C_5))}$. Таким чином, множина $\sqrt{E(\lambda(C_5)}$ містить максимальні зчеплені системи:

$$a\Delta, a\Theta, a\Lambda_3, a\Gamma,\ a \in C_5^*,$$

які разом з ідемпотентами утворюють 17-елементну підмножину

$$T_{17} = E(\lambda(C_5)) \cup \big\{a\Delta, a\Theta : a \in \{1,2\}\big\} \cup \{a\Lambda_3, a\Gamma : a \in C_5^*\},$$

що проектується бієктивно на напівгрупу орбіт $\lambda(C_5)/C_5$. Множина T_{17} має вигляд (ми зв'язуємо елемент $x \in T_{17}$ з ідемпотентом $e \in T_{17}$ стрілкою, якщо $x \circ x = e$):



Множина $\sqrt{E(\lambda(C_5))}$ містить на 24 елементи більше і збігається з об'єднанням $T_{17} \cup \sqrt{\mathcal{Z}}$, де

$$\sqrt{\mathcal{Z}} = \{a\Theta + b, a\Gamma + b : a \in C_5^*,\ b \in C_5\}.$$

Оскільки кожен елемент напівгрупи $\lambda(C_5)$ єдиним чином представляється у вигляді суми $\mathcal{L} + b$ для деяких $\mathcal{L} \in T_{17}$ і $b \in C_5$, то таблицю множення для напівгрупи $\lambda(C_5)$ можна відтворити з таблиці Келі множення елементів множини T_{17}:

Таблиця 5.2

Таблиця Келі множення елементів множини T_{17}

$\circ$	Λ_4	Λ	Δ	Λ_3	$-\Lambda_3$	2Λ	2Δ	$2\Lambda_3$	$-2\Lambda_3$	$a\Theta, a\Gamma$
Λ_4	Λ_4	Λ	Λ	Λ	Λ	2Λ	2Λ	2Λ	2Λ	$\mathcal{Z}$
Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	$\mathcal{Z}$	$\mathcal{Z}$	$\mathcal{Z}$	$\mathcal{Z}$	$\mathcal{Z}$
Δ	Δ	Λ	Λ	Λ	Λ	2Θ	2Θ	2Θ	2Θ	$\mathcal{Z}$
Λ_3	Λ_3	Λ	Λ	Λ	Λ	$2\Theta+2$	$2\Theta+2$	$2\Theta+2$	$2\Theta+2$	$\mathcal{Z}$
$-\Lambda_3$	$-\Lambda_3$	Λ	Λ	Λ	Λ	$2\Theta-2$	$2\Theta-2$	$2\Theta-2$	$2\Theta-2$	$\mathcal{Z}$
2Λ	2Λ	$\mathcal{Z}$	$\mathcal{Z}$	$\mathcal{Z}$	$\mathcal{Z}$	2Λ	2Λ	2Λ	2Λ	$\mathcal{Z}$
2Δ	2Δ	Θ	Θ	Θ	Θ	2Λ	2Λ	2Λ	2Λ	$\mathcal{Z}$
$2\Lambda_3$	$2\Lambda_3$	$\Theta-1$	$\Theta-1$	$\Theta-1$	$\Theta-1$	2Λ	2Λ	2Λ	2Λ	$\mathcal{Z}$
$-2\Lambda_3$	$-2\Lambda_3$	$\Theta+1$	$\Theta+1$	$\Theta+1$	$\Theta+1$	2Λ	2Λ	2Λ	2Λ	$\mathcal{Z}$
Θ	Θ	Θ	Θ	Θ	Θ	$\mathcal{Z}$	$\mathcal{Z}$	$\mathcal{Z}$	$\mathcal{Z}$	$\mathcal{Z}$
2Θ	2Θ	$\mathcal{Z}$	$\mathcal{Z}$	$\mathcal{Z}$	$\mathcal{Z}$	2Θ	2Θ	2Θ	2Θ	$\mathcal{Z}$
Γ	Γ	$\Theta+1$	$\Theta+1$	$\Theta+1$	$\Theta+1$	$2\Theta+2$	$2\Theta+2$	$2\Theta+2$	$2\Theta+2$	$\mathcal{Z}$
$-\Gamma$	$-\Gamma$	$\Theta-1$	$\Theta-1$	$\Theta-1$	$\Theta-1$	$2\Theta-2$	$2\Theta-2$	$2\Theta-2$	$2\Theta-2$	$\mathcal{Z}$
2Γ	2Γ	$\Theta-1$	$\Theta-1$	$\Theta-1$	$\Theta-1$	$2\Theta+2$	$2\Theta+2$	$2\Theta+2$	$2\Theta+2$	$\mathcal{Z}$
-2Γ	-2Γ	$\Theta+1$	$\Theta+1$	$\Theta+1$	$\Theta+1$	$2\Theta-2$	$2\Theta-2$	$2\Theta-2$	$2\Theta-2$	$\mathcal{Z}$

Дивлячись на таблицю, ми бачимо, що елемент Θ не є регулярним в $G(C_5)$, бо $\Theta \circ \mathcal{F} \circ \Theta = \mathcal{Z} \neq \Theta$ для кожного гіперпростору включення $\mathcal{F} \in G(C_5)$. Звідси випливає, що напівгрупи $\lambda(C_5)$ та $G(C_5)$ не є регулярними. Також видно, що T_{17} не є піднапівгрупою напівгрупи $\lambda(C_5)$ і, отже, не є трансверсальною напівгрупою для напівгрупи $\lambda(C_5)$. Це не є випадковим.

Твердження 5.11.2. *Напівгрупа $\lambda(C_5)$ не містить трансверсальної напівгрупи.*

Доведення. Припустимо, що $\lambda(C_5)$ містить піднапівгрупу T, що проектується бієктивно на напівгрупу орбіт $\lambda(C_5)/C_5$. Тоді T мусить містити множину ідемпотентів $E(\lambda(C_5))$, а також множину $\sqrt{E(\lambda(C_5))} \setminus \sqrt{\mathcal{Z}}$. Таким чином,

$$T \supset \{\mathcal{U}, \mathcal{Z}, \Lambda, -\Lambda, \Delta, 2\Delta, \Lambda_3, -\Lambda_3, 2\Lambda_3, -2\Lambda_3\}.$$

Оскільки $2\Lambda_3 \circ \Lambda = \Theta - 1 \neq \Theta = 2\Delta \circ \Lambda$, то перетин $T \cap (\Theta + C_5)$ містить дві різні точки, що суперечить тому, що перетин має бути одноточковим.

$\square$

Аналізуючи таблицю множення для множини T_{17}, ми встановили наступні властивості напівгрупи $\lambda(C_5)$.

Теорема 5.11.3.

1) *Максимальна зчеплена система $\mathcal{Z}$ є нулем напівгрупи $\lambda(C_5)$.*
2) *$\lambda(C_5)$ містить 5 ідемпотентів: $\mathcal{U}$, $\mathcal{Z}$, Λ_4, Λ, 2Λ, які комутують.*
3) *Множина центральних елементів напівгрупи $\lambda(C_5)$ збігається з $C_5 \cup \{\mathcal{Z}\}$.*
4) *Всі нетривіальні підгрупи $\lambda(C_5)$ є ізоморфними до C_5.*
5) *Напівгрупи $G(C_5)$ та $\lambda(C_5)$ не є регулярними.*

5.11.5. Підсумкова таблиця. Одержані результати про суперрозширення груп G порядку $|G| \leq 5$ наведені в наступній таблиці, де через $K(\lambda(G))$ позначається мінімальний ідеал напівгрупи $\lambda(G)$.

Таблиця 5.3

Структура суперрозширення $\lambda(G)$ для груп G порядку $|G| \leq 5$

$\|G\|$	$\|\lambda(G)\|$	$\lambda(G)$	$\|E(\lambda(G))\|$	$K(\lambda(G))$	максимальна група
2	2	C_2	1	C_2	C_2
3	4	$C_3 \cup \{\triangleright\}$	2	$\{\triangleright\}$	C_3
4	12	$C_2^1 \times G$	2	$C_2 \times G$	$C_2 \times G$
5	81	$T_{17} \cdot C_5$	5	$\{\mathcal{Z}\}$	C_5

Висновки до розділу 5

В п'ятому розділі ми вивчили алгебраїчну структуру напівгруп $\lambda(X)$ над групами X. Ми почали розділ, вивчаючи самозачеплені множини в групі. В підрозділі 5.2 ми використали самозачеплені множини для обчислення потужності напівгрупи $\overleftrightarrow{\lambda}(X)$ максимальних інваріантних зчеплених систем на групі X. В теоремі 5.2.4 показано, що для нескінченної групи X потужність $\overleftrightarrow{\lambda}(X)$ дорівнює $2^{2^{|X|}}$. В твердженні 5.2.5 і теоремі 5.2.8 ми обчислили потужність $\overleftrightarrow{\lambda}(X)$ для всіх скінченних груп X порядку $|X| \leq 8$, а також охарактеризували групи X з $|\overleftrightarrow{\lambda}(X)| = 1$. В підрозділах 5.4 і 5.5 ці результати використовувалися для характеризації груп X, суперрозширення яких мають праві нулі або є комутативними. У твердженні 5.3.1 ми показали, що максимальна зчеплена система $\mathcal{L} \in \lambda(X)$ є правим нулем в $\lambda(X)$ тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{L}$ є інваріантною в тому розумінні, що $xL \in \mathcal{L}$ для всіх $L \in \mathcal{L}$ і всіх $x \in X$. В теоремі 5.3.2 доведено, що група X містить максимальну інваріантну зчеплену систему (рівносильно, $\lambda(X)$ містить правий нуль) тоді і тільки тоді, коли кожен елемент X має непарний порядок. Ситуація з (лівими) нулями є дещо іншою: максимальна зчеплена система $\mathcal{L} \in \lambda(X)$ є лівим нулем в $\lambda(X)$ тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{L}$ є нулем в $\lambda(X)$ тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{L}$ є єдиною інваріантною максимальною зчепленою системою на X. Напівгрупа $\lambda(X)$ має (лівий) нуль тоді і тільки тоді, коли X є скінченною групою непарного порядку $|X| \leq 5$ (рівносильно, X є ізоморфною до циклічної групи C_1, C_3 чи C_5). Напівгрупа $\lambda(X)$ є комутативною тоді і тільки тоді, коли група X має скінченний порядок $|X| \leq 4$.

В підрозділі 5.6 ми описали скоротні елементи в $\lambda(X)$. Зокрема, ми показали, що для скінченної групи X всі скоротні зліва чи скоротні справа елементи в $\lambda(X)$ є головними ультрафільтрами. З другого боку, якщо група X є зліченною, то множина скоротних справа елементів містить відкритий всюди щільний перетин з піднапівгрупою $\lambda^\circ(X) \subset \lambda(X)$ вільних максимальних зчеплених систем, див. теорему 5.6.5. Це нагадує ситуацію з напівгрупою $\beta(X)$, що містить всюди щільну відкриту підмножину скоротних справа елементів (див. [55, теор. 8.10]), а також з напівгрупою $G(X)$, скоротні справа елементи якої утворюють множину, що має відкритий всюди щільний перетин з множиною $G^\circ(X)$ вільних гіперпросторів включення.

Згідно з [55], для кожної групи X топологічний центр напівгрупи $\beta(X)$ збігається з X. З другого боку, топологічний центр напівгрупи $G(X)$ збігається з підпростором $G^\bullet(X)$ простору $G(X)$, що містить гіперпростори включення з скінченними носіями, див. теорему 4.6.1. Подібні результати виконуються також для напівгрупи $\lambda(X)$: для кожної не більш ніж зліченної групи X топологічний центр напівгрупи $\lambda(X)$ збігається з $\lambda^\bullet(X)$, див. теорему 5.7.4.

Підрозділ 5.8 присвячується опису алгебраїчного центру напівгрупи $\lambda(X)$. В теоремі 5.8.2 ми довели, що для кожної зліченної нескінченної групи X алгебраїчний центр напівгрупи $\lambda(X)$ збігається з алгебраїчним центром групи X. Цікаво відмітити, що для довільної групи X алгебраїчні центри напівгруп $\beta(X)$ і $G(X)$ також збігаються з центрами групи X, див. [55, тв. 6.54] і теорему 4.5.2. В той же час для скінченних груп X порядку $3 \leq |X| \leq 5$ алгебраїчний центр напівгрупи $\lambda(X)$ є строго більшим ніж алгебраїчний центр групи X, див. підрозділ 5.11.

Важливим результатом цього розділу є теорема 5.9.1, яка стверджує, що група X є непарною тоді і тільки тоді, коли всі мінімальні ліві ідеали напівгрупи $\lambda(X)$ є одноточковими множинами. В цьому випадку мінімальний ідеал $K(\lambda(X))$ напівгрупи $\lambda(X)$ є замкненою напівгрупою правих нулів, що містить всі інваріантні максимальні зчеплені системи.

Одним з основних результатів п'ятого розділу є теорема 5.10.1, яка стверджує, що мінімальні ліві ідеали напівгрупи $\lambda(\mathbb{Z})$ є компактними метризовними топологічними напівгрупами, які ізоморфні до мінімальних лівих ідеалів суперрозширення $\lambda(\mathbb{Z}_2)$ групи $\mathbb{Z}_2$ цілих 2-адичних чисел.

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

Метод ультрафільтрів є одним з найпотужніших інструментів у сучасній комбінаториці чисел. Проте він має свої межі і не може бути застосований до певних проблем комбінаторики чисел. І.В. Протасов висунув припущення, що такі проблеми можуть розв'язуватись за допомогою максимальних зчеплених систем. Це було мотивацією дисертаційної роботи, метою якої є дослідження алгебро-топологічної структури напівгруп гіперпросторів включення та максимальних зчеплених систем на групах.

У дисертаційній роботі отримано такі основні результати:

— продовжено (асоціативну) бінарну операцію, задану на дискретному просторі S, до (асоціативної) правотопологічної операції на просторі гіперпросторів включення $G(S)$ та його підпросторах і вивчено її взаємозв'язок з ґратковою структурою простору $G(S)$;

— описано деякі важливі піднапівгрупи напівгрупи $G(S)$;

— описано мінімальні (ліві) ідеали, топологічні та алгебраїчні центри, скоротні справа (зліва) елементи, праві (ліві) нулі, комутативність напівгруп гіперпросторів включення та максимальних зчеплених систем;

— отримано дуальну характеризацію гіперпросторів включення зі скінченними носіями;

— вивчено самозачеплені множини в групах і обчислено їх мінімальну потужність для деяких груп;

— доведено топологічну ізоморфність мінімальних (лівих) ідеалів напівгруп $\lambda(\mathbb{Z})$ та $\lambda(\mathbb{Z}_2)$, де $\mathbb{Z}_2$ – група 2-адичних цілих чисел;

— повністю описано структуру скінченних напівгруп гіперпросторів включення $G(H)$ та суперрозширення $\lambda(H)$ для груп H малих порядків.

Як виявилося, напівгрупи гіперпросторів включення та максимальних зчеплених систем мають набагато складнішу структуру ніж напівгрупи ультрафільтрів. Це спостерігається вже на скінченному рівні: для скінченної напівгрупи S напівгрупа ультрафільтрів $\beta(S)$ ізоморфна S, в той час як порядок напівгруп $\lambda(S)$ і $G(S)$ має експоненціальний ріст, коли $|S|$ прямує до безмежності, і, як наслідок, їх структура набагато складніша, ніж структура S.

У дисертаційній роботі широко використовуються методи теорії груп та напівгруп, теорії правотопологічних напівгруп, p-адичного аналізу, теорії категорій, функторів і монад, загальної топології, загальні теоретико-множинні, комбінаторні та тополого-алгебраїчні методи. Результати дисртації опубліковані в 5 наукових статтях у журналах, включених до переліку ВАК України та апробовані на численних міжнародних конференціях та школах. Їх достовірність та наукове значення підтверджуються цитуваннями у статтях інших авторів, зокрема, недавньому огляді “Algebra in the space of ultrafilters and Ramsey Theory” Н. Гайдмена та Д. Штраус.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Грехем Р. Начала теории Рамсея / Р. Грехем. – М.: Мир, 1985. – 97 с.

2. Заричный М. М. Монада суперрасширения и ее алгебры / М. М. Заричный // Укр. матем. журнал. – 1987. – Т. 39, № 3. – С. 303-309.

3. Заричный М. М. О мягкости умножений в суперрасширениях / М. М. Заричный // Вестник МГУ. Серия: ОТ. – 1989. – С. 70-76.

4. Заричный М. М. Абсолютные екстензоры и геометрия умножения монад в категории компактов / М. М. Заричный // Матем. сб. – 1991. – Т. 182, № 9. – С. 1061-1080.

5. Зарічний М. М. Топологія функторів і монад у категорії компактів / М. М. Зарічний. – К.: ІСДО, 1993. – 108 с.

6. Зеленюк Е. Г. Изоморфизмы полугрупп ультрафильтров / Е. Г. Зеленюк // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – Т. 42, № 4. – С. 138-141.

7. Зеленюк Є. Г. Невласні гомоморфізми напівгруп ультрафільтрів / Є. Г. Зеленюк // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – Т. 43, № 1. – С. 19-22.

8. Иванов А. В. Суперрасширения открыто-порождённых бикомпактов / А. В. Иванов // Докл. АН СССР. – 1981. – Т. 259, № 2. – С. 275-278.

9. Клиффорд А. Алгебраическая теория полугрупп / А. Клиффорд, Г. Престон. – М.: Мир, 1972. – 285 с.

10. Мирзаханян Р. Е. Бесконечная итерация функтора гиперпространства / Р. Е. Мирзаханян // Вестник МГУ. Сер. мат., мех. – 1988. – № 6. – С. 14-17.

11. Мирзаханян Р. Е. Тройка бесконечных итераций функтора гиперпространств включения – послойная версия / Р. Е. Мирзаханян // Вестник МГУ. Сер. мат., мех. – 1989. – С. 84-89.

12. Моисеев Е. В. О пространствах замкнутых гиперпространств роста и включения / Е. В. Моисеев // Вестник МГУ. – 1988. – № 3. – С. 54-57.

13. Моисеев Е. В. Суперрасширения нормальных пространств / Е. В. Моисеев // Вестник МГУ. – 1990. – № 2. – С. 80-83.

14. Никифорчин О. Р. Елементи загальної топології / О. Р. Никифорчин. – Івано-Франківськ: Нова зоря, 2001. – 172 с.

15. Общая алгебра / [Артамонов В. А., Салий В. Н., Скорняков Л. А. и др.]; под ред. Л. А. Скорнякова. – М.: Наука, 1990. – Т. 2. – 479 с.

16. Протасов И. В. Идеалы полугруппы ультрафильтров топологической группы / И. В. Протасов // Укр. матем. журнал. – 1995. – Т. 47, № 4. – С. 506-511.

17. Протасов И. В. Топологический центр полугрупп свободных ультрафильтров / И. В. Протасов // Матем. заметки. – 1998. – Т. 63, № 3. – С. 437-441.

18. Протасов И. В. Уравнения в βG и разложимость абелевых групп / И. В. Протасов // Матем. заметки. – 1999. – Т. 66, № 6. – С. 951-953.

19. Радул Т. Монада гиперпространств включения и ее алгебры / Т. Радул // Укр. матем. журнал. – 1990. – Т. 42, №6. – С. 806-811.

20. Федорчук В. В. Общая топология. Основные конструкции / В. В. Федорчук, В. В. Филиппов. – Изд. Моск. унив., 1988. – 251 с.

21. Хейер. Х. Вероятностные меры на локально компактных группах / Х. Хейер. – М.: Мир, 1981. – 702 с.

22. Энгелькинг Р. Общая топология / Р. Энгелькинг. – М.: Мир, 1986. – 752 с.

23. Arens R. The adjoint of a bilinear operation / R. Arens // Proc. Amer. Math. Soc. – 1951. – Vol. 2. – P. 839-848.

24. Balcar B. On minimal dynamical systems on Boolean algebras / B. Balcar, A Błaszczyk // Commentat. Math. Univ. Carol. – 1990. – Vol. 31, № 1. – P. 7-11.

25. Balcar B. Structural properties of universal minimal dynamical systems for discrete semigroups / B. Balcar, F. Franek // Trans. Am. Math. Soc. – 1997. – Vol. 349, № 5. – P. 1697-1724.

26. Banakh T. Algebra in superextensions of groups, I: zeros and commutativity / T. Banakh, V. Gavrylkiv, O. Nykyforchyn // Algebra Discrete Math. – 2008. – № 3. – P. 1-29.

27. Banakh T. Algebra in superextension of groups, II: cancelativity and centers / T. Banakh, V. Gavrylkiv // Algebra Discrete Math. – 2008. – № 4. – P. 1-14.

28. Banakh T. Algebra in the superextensions of groups, III: minimal left ideals / T. Banakh, V. Gavrylkiv // Mat. Stud. – 2009. – Vol. 31. – P. 142-148.

29. Banakh T. Functor-semigroups / T. Banakh, V. Gavrylkiv. – (Preprint).

30. Banakh T. Algebra in superextensions of groups / T. Banakh, V. Gavrylkiv // Аналіз та топологія: матеріали Міжнар. наук. конф. (Львів, 2-7 червня 2008 р.). – Львів. – 2008. – С. 21-24.

31. Banakh T. Embedding topological semigroups into the hyperspaces over topological groups / T. Banakh, O. Hryniv // Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica. – 2007. – Vol. 48, № 2. – P. 3-18.

32. Banakh T. Characterizing compact Clifford semigroups that embed into convolution and functor-semigroups / T. Banakh, M. Cencelj, O. Hryniv, D. Repovš// Documenta Mathematica. – (Preprint).

33. Banakh T. Coherence of Semifilters [Електронний ресурс]/ T. Banakh, L. Zdomskyy:
http://www.franko.lviv.ua/faculty/mechmat/Departments/Topology/booksite.html

34. Budak T. Subsemigroups of Stone-Čech compactifications / T. Budak, N. Isic, J. Pym // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. – 1994. – Vol. 116. – P. 99-118.

35. Chein O. Quasigroups and loops: theory and applications /O. Chein, H. O. Pflugfelder, J. D. Smith. – Berlin.: Heldermann Verlag, 1990. – Vol. 8. – 568 p.

36. Comfort W. W. Ultrafilters: some old and new results / W. W. Comfort // Bull. Amer. Math. Soc. – 1977. – Vol. 83. – P. 417-455.

37. Curtis D. W. Growth hyperspaces of Peano continua / D. W. Curtis // Trans. Amer. Math. Soc. – 1978. – Vol. 238. – P. 271-283.

38. Curtis D. W. Hyperspaces of Peano continua are Hilbert cubes / D. W. Curtis , R. M. Schori // Fund. Math. – 1978. – Vol. 101. – P. 19-38.

39. Dedekind R. Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre grüssten gemeinsammen Teiler / R. Dedekind // In Gesammelte Werke. – 1897. – Bd. 1. – P. 103-148.

40. Day M. Amenable semigroups / M. Day // Illinois. J. Math. – 1957. – Vol. 1. – P. 509-544.

41. Ellis R. Lectures on topological dynamics / R. Ellis. – New-York: Benjamin, 1969. – 211 p.

42. Ferri S. On the topological centre of the algebra $L \cup C(G)^*$ for general topological groups / S. Ferri, M. Neufang // J. Funct. Anal. – 2007. – Vol. 244, № 1. – P. 154-171.

43. Fustenberg H. Idempotents in compact semigroups and Ramsey Theory / H. Fustenberg, Y. Katznelson // Israel J. Math. – 1989. – Vol. 68. – P. 257-270.

44. Gavrylkiv V. Right-topological semigroup operations on inclusion hyperspaces / V. Gavrylkiv // Матеріали VI Міжнар. алгебр. конф. в Україні (Кам'янець-Подільський, 1-7 липня 2007 р.). – Київ-Кам'янець-Подільський. – 2007. – С. 82-83.

45. Gavrylkiv V. Right-topological semigroup operations on superexstensions / V. Gavrylkiv // Алгебра, топологія і аналіз: матер. V літн. школи (Козьова, 6-18 серпня 2007 р.). – Львів-Козьова. – 2007. – С. 38-40.

46. Gavrylkiv V. The spaces of inclusion hyperspaces over noncompact spaces / V.Gavrylkiv // Mat. Stud. – 2007. – Vol. 28, №1. – P. 92-110.

47. Gavrylkiv V. Right-topological semigroup operations on inclusion hyperspaces / V. Gavrylkiv // Mat. Stud. – 2008. – Vol. 29, №1. – P. 18-34.

48. Gavrylkiv V. Zeros and comutativity of semigroups of maximal linked systems / V. Gavrylkiv // Сучасні проблеми механіки та математики: матер. Міжнар. наук. конф., присв. 80-річчю від дня народ. академіка НАН України Я. С. Підстригача (Львів, 25-29 травня 2008 р.). – Львів. – 2008. – С. 210-211.

49. Gavrylkiv V. Algebra in superextensions of groups [Електронний ресурс] / V. Gavrylkiv // Set Theory, Topology and Banach Spaces: Second International Topology Conference in Poland (Kielce, July 7-11, 2008). – http://www.pu.kielce.pl/∼topoconf/

50. Gavrylkiv V. Minimal left ideals of the superextensions of groups / V. Gavrylkiv // Нескінченновимірний аналіз та топологія: матеріали Міжнар. наук. конф. (Яремче, 27 травня - 1 червня 2009 р.). – Івано-Франківськ. – 2009. – С. 46-48.

51. de Groot J. Supercompactness and superextensions / J. de Groot // Contributions to extension theory of topological structures: Proc of Symp. (Berlin, 1967). – Berlin: Deutscher Verlag Wiss., 1969. – P. 89-90.

52. de Groot J. Superextensions / J. de Groot, G. A. Jensen and A. Verbeek. – Amsterdam: Math. Centrum Afd. Zuivere Wisk., 1968. – 33 p. – (Preprint ZW-017).

53. Hindman N. Finite sums from sequences within cells of partition of $\mathbb{N}$ / N. Hindman // J. Combin. Theory Ser. A. – 1974. – Vol. 17. – P. 1-11.

54. Hindman N. Ultrafilters and combinatorial number theory / N. Hindman // Lecture Notes in Math., 1979. – Vol. 751. – P. 49-184.

55. Hindman N. Algebra in the Stone-Čech compactification / N. Hindman, D. Strauss. – Berlin, New York: de Gruyter, 1998. – 485 p.

56. Hrbaček K. Introduction to Set Theory / K. Hrbaček, T. Jech. – New York: Marcel Dekker Inc., 1999. – 291 p.

57. Kechris A. Classical Descriptive Set Theory / A. Kechris. – Springer, 1995. – 402 p.

58. Nykyforchyn O. A monad for the inclusion hyperspace functor is unique / O. Nykyforchyn // Mat. Stud., 2007. – Vol. 27, № 1. – P. 3-18.

59. Owings J. Problem E2494 / J. Owings // Amer. Math. Monthly – 1974. – Vol. 81. – P. 902.

60. Pflugfelder H. Quasigroups and loops: introduction / H. Pflugfelder. – Berlin: Heldermann Verlag. – 1990. – Vol. 7. – 147 p.

61. Protasov I. Combinatorics of Numbers. / I. Protasov. – Lviv: VNTL, 1997. – Vol. 2. – 70 p.

62. Protasov I. Ball Structures and Colorings of Graphs and Groups / I. Protasov, T. Banakh. – Lviv: VNTL, 2003. – Vol. 11. – 148 p.

63. Ruppert W. Compact semitopological semigroup: an intrinsic theory / W. Ruppert // Lecture Notes in Math. – 1984. – Vol. 1079. – P. 1-260.

64. Teleiko A. An equivariant Hilbert cube generated by the transversality mapping / A. Teleiko // Mat. Stud. – 1997. – Vol. 7, № 2. – P. 205-210.

65. Teleiko A. On extension of functors onto the Kleisli category of the inclusion hyperspace monad / A. Teleiko // Serdica Math. J. – 1998. – Vol. 24, № 3-4. – P. 283-288.

66. Teleiko A. Categorial topology of compact Hausdorff spaces. Monograph Series / A. Teleiko, M. Zarichnyi. – Lviv: VNTL, 1999. – Vol. 5. – 264 p.

67. van Mill J. Supercompactness and Wallman spaces / J. van Mill // Amsterdam: Math. Centrum, 1977. – Vol. 85. – 238 p.

68. Verbeek A. Superextensions of topological spaces / A. Verbeek // Amsterdam: Math. Centrum, 1972. – Vol. 41. – 155 p.

69. van de Vel M. The fixed point property of superextensions / M. van de Vel // General topology and its relations to modern analysis and algebra, IV: Proc. Fourth Prague Topological Sympos., Part B (Prague, 1976). – Prague: Soc. Czechoslovak Mathematicians and Physicists, 1977. – P. 477–480.

Покажчик